

Marian Klasztorny¹Politechnika Warszawska, Instytut Mechaniki i Konstrukcji, ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa
e-mail: klasztorny@poczta.fm

SYMULACJA PROCESÓW REOLOGICZNYCH W DUROPLASTACH OPISANYCH MODELEM HWKK/H

Praca dotyczy symulacji procesów reologicznych w duroplastach przy sterowaniu naprężeniami. Przyjęto następujące warunki eksploatacyjne materiału: materiał pracuje w stanie szklistym w warunkach normalnych; rozpatruje się procesy quasi-statyczne izotermiczne; poziomy naprężen nie przekraczają 30% wytrzymałości doraźnej na rozciąganie. Z badań eksperymentalnych w ww. warunkach eksploatacyjnych wynika, że materiał może być traktowany jako jednorodny, izotropowy, liniowo lepko-sprężysty. Odształcenia postaciowe są lepko-sprężyste odwracalne. Można wyróżnić odształcenia postaciowe krótkotrwałe, średniotrwałe i długotrwałe, którym są przyporządkowane odpowiednio funkcja wykładnicza ułamkowa oraz dwie funkcje wykładnicze zwykle jako funkcje historii naprężenia. Odształcenia objętościowe są sprężyste. Podane przesłanki empiryczne spełnia model reologiczny HWKK/H, opracowany przez autora. Przedstawiono standardowe równania konstytutywne lepko-sprężystości duroplastów, odpowiadające modelowi HWKK/H, który jest opisany przez 2 stałe sprężystości i 6 stałych lepko-sprężystości, tj. 3 współczynniki pełzania postaciowego długotrwałego i 3 czasy retardacji odształceń postaciowych. Opracowano jednolity (dla wszystkich trzech funkcji tworzących) numeryczny algorytm symulacji dowolnych procesów reologicznych w duroplastach, w którym wykorzystano zasadę superpozycji Boltzmanna, wynik symulacji pełzania klasycznego oraz kwadraturę Gaussa wysokiego stopnia. Dowolną ciągłą funkcję naprężenia aproksymowano funkcją „schodkową”. Równania konstytutywne materiału przekształcono do postaci nadającej się do algorytmizacji. Podano sposób numerycznego obliczenia z wysoką dokładnością całki podwójnie niewłaściwej, występującej w definicji funkcji pełzania krótkotrwałego. Opracowano algorytm symulacji dowolnych procesów reologicznych w duroplastach, przy sterowaniu naprężeniami, który zaprogramowano w języku Pascal. Algorytm ten przetestowano na żywicy epoksydowej Epidian 53, przyjmując 3-testowe programy naprężenia w jednoosiowym rozciąganiu materiału.

Słowa kluczowe: duroplasty, procesy reologiczne, sterowanie naprężeniami, symulacja numeryczna

SIMULATION OF RHEOLOGICAL PROCESSES IN RESINS DESCRIBED BY HWKK/H MODEL

The paper concerns simulation of rheological processes in hardening plastics (resins) with stress control. Service conditions of the material have been assumed as follows: the material works in the glassy state and in the normal conditions; rheological processes are quasi-static and isothermal; the reduced stress levels do not exceed 30% of the immediate tensile strength of the material. The experiments performed at these service conditions have pointed out that the material can be treated as uniform, isotropic and linearly viscoelastic. The shear strains are viscoelastic and reversible. Short-term, medium-term and long-term shear strains can be distinguished, respectively described by fractional exponent and two normal exponents as stress-history functions. The bulk strains are elastic. Above mentioned empiric observations are satisfied by the HWKK/H rheological model of resins (Fig. 1). The standard constitutive equations (2) of viscoelasticity related to the HWKK/H model are presented. The model is described by 2 elastic constants and 6 viscoelastic constants, i.e. 3 long-term shear creep coefficients and 3 retardation times of shear strains. A numerical algorithm for simulation of rheological processes in resins has been developed, which is unified for all stress-history functions used in the model. In the algorithm, the Boltzmann superposition rule, the simulation result of classic creep as well as a high-rank Gauss quadrature have been used (Eqs (14, 18-20)). An optional continuous stress function is approximated with the staircase function (Eq (19)). Constitutive equations (2) have been transformed into the algorithmic form (20). The problem of quasi-exact calculation of double-improper integral (14)₁ has been solved effectively. The algorithm, concerning simulation of arbitrary rheological processes with stress control, has been programmed in Pascal and tested on Epidian 53 epoxy resin. Three stress programmes in uni-directional tension have been considered (Fig. 3). The results of the simulation are presented in Table 2 and in Figures 4-6. It has been pointed out that the algorithm developed in the study is general, simple for programming and yields quasi-exact solutions in very short times. So, it is useful in practice.

Keywords: resins, rheological processes, stress control, numerical simulation

WSTĘP

Właściwości reologiczne tworzyw sztucznych, zależne od rodzaju i ilości substancji modyfikujących polimer, a także od parametrów procesu wytwarzania, powinny być uwzględniane w projektowaniu konstrukcji

[1-3]. Niniejsza praca odnosi się do podgrupy tworzyw sztucznych, tj. duroplastów, czyli żywic.

Duroplasty, m.in. EP, UP, VE, PF, CF, są polimerami amorficznymi, usieciowanymi przestrzennie. Nie

¹ prof. dr hab. inż.

przechodzą w stan płynny przy podwyższaniu temperatury. Utwardzenie duroplastów jest nieodwracalne. Typ i parametry utwardzenia zależą od rodzaju żywicy. Utwardzenie może być chemiczne, termiczne, za pomocą promieni UV lub/i za pomocą wiązki elektronowej. Duroplasty pracują w stanie szklistym jako materiały izotropowe, liniowo lepkosprężyste. Przy długotrwałym obciążeniu odkształcenia lepkosprężyste osiągają relatywnie duże wartości, są jednak odwracalne po zdjęciu obciążenia, gdy czas $t \rightarrow \infty$. Duroplasty są powszechnie stosowane jako matryce włóknistych kompozytów konstrukcyjnych [3].

Prace teoretyczne i doświadczalne dotyczące modelowania reologicznego plastomerów są prowadzone od kilkudziesięciu lat. Formułuje się teorie półempiryczne, bazujące głównie na próbach pełzania prętów rozciąganych osiowo. Przegląd literatury do 1989 roku w zakresie funkcji tworzących (inaczej funkcji historii lub pamięci) w reologii plastomerów przedstawił Garbarski [2]. Są to funkcje wykładnicze zwykłe i ułamkowe, rozszerzone funkcje wykładnicze ułamkowe, funkcje Kołtułnowa, funkcje połówkowe (Garbarskiego) i in.

Modele reologiczne plastomerów opisuje się standardowymi lub odwrotnymi równaniami konstytutywnymi lepkosprężystości. Równaniom standardowym odpowiadają modele mechaniczne złożone z szeregowo połączonych elementów Hooke'a (H), Kelvina (K), Newtona (N), Wilczyńskiego (W), Garbarskiego (G) i in., m.in. [1-6]. Pełny opis modeli HK (Zenera) i HW przedstawił Wilczyński w monografii [1]. Modele HKK, HW, HG rozpatrywał Garbarski w monografii [2]. W modelu HW funkcja tworząca jest funkcją wykładniczą ułamkową, która dąży do nieskończoności dla $t \rightarrow 0$. W symulacji procesów reologicznych opisanych modelem HW mogą wystąpić znaczne błędy wynikające z bezpośredniego numerycznego obliczania całek niewłaściwych występujących w równaniach konstytutywnych [2].

W latach 1997-2005 w Instytucie Mechaniki i Konstrukcji PW rozwinięto model reologiczny HW [7] oraz sformułowano bardziej zaawansowane modele o symbolach HWKN [4], HWKN/H [8], HWKK [5], HWKK/H [9, 10]. Na podstawie badań eksperymentalnych, identyfikacyjnych i walidacyjnych wykazano [5, 9], że model HWKK/H jest modelem adekwatnym dla duroplastów pracujących w warunkach normalnych (temperatura 20°C, ciśnienie atmosferyczne, wilgotność 65%). Model ten jest bardzo ogólny, relatywnie prosty i m.in. pozwala na modelowanie polimerowych kompozytów włóknistych metodą analogii sprężystej - lepkosprężystej [7, 11, 12].

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie i przetestowanie komputerowego algorytmu symulacji dowolnych procesów reologicznych w duroplastach, sterowanych naprężeniami. Algorytm odpowiada modelowi

reologicznemu HWKK/H i pozwala na wyznaczanie rozwiązań quasi-ściśłych.

STANDARDOWE RÓWNANIA KONSTITUTYWNE LEPKOSPŘEŻYSTOŚCI DUROPLASTÓW, OPISUJĄCE MODEL HWKK/H [9]

W odniesieniu do duroplastów (żywic) przyjęto następujące warunki eksploatacyjne materiału: materiał pracuje w stanie szklistym w warunkach normalnych; rozpatruje się procesy quasi-statyczne izotermiczne; poziomy naprężeń zredukowanych nie przekraczają 30% wytrzymałości doraźnej na rozciąganie. Z badań eksperymentalnych w ww. warunkach eksploatacyjnych wynika, że:

- Materiał może być traktowany jako jednorodny, izotropowy, liniowo lepkosprężysty.
- Odkształcenia postaciowe są lepkosprężyste (odwracalne). Można wyróżnić odkształcenia postaciowe krótkotrwałe (w czasie do kilku godzin), średniotrwałe (w czasie od kilku do kilkudziesięciu godzin) i długotrwałe (w czasie od kilkudziesięciu do kilkuset lub więcej godzin), którym są przyporządkowane odpowiednio funkcja wykładnicza ułamkowa (z ułamkiem 0,5) oraz dwie funkcje wykładnicze zwykłe jako funkcje tworzące.

• Odkształcenia objętościowe są sprężyste. Podane przesłanki empiryczne spełnia model reologiczny HWKK/H, którego mechaniczne odwzorowanie pokazano na rysunku 1. W odniesieniu do odkształceń postaciowych model składa się z czterech elementów: H, W, K, K, a odkształcenia objętościowe odwzorowuje jeden element H.

Równania konstytutywne materiału izotropowego formułuje się w dowolnie obranym układzie współrzędnych kartezjańskich $x_1x_2x_3$. Wektory stanu naprężenia i odkształcenia, odniesione do kostki różniczkowej w układzie $x_1x_2x_3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \text{col}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \text{col}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}) \end{aligned} \quad (1)$$

odwzorowują tensory naprężenia i odkształcenia, a więc ε_{ij} jest połową kąta odkształcenia postaciowego elementu różniczkowego $dx_1dx_2dx_3$ ($i \neq j$).

Standardowe sprzężone równania konstytutywne lepkosprężystości duroplastu, opisujące model reologiczny HWKK/H, w zapisie macierzowym mają postać [9]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{S}(t) \otimes \boldsymbol{\sigma}(t) \quad (2)$$

gdzie

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) & S_2(t) & S_2(t) & 0 & 0 & 0 \\ & S_1(t) & S_2(t) & 0 & 0 & 0 \\ & & S_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_s(t) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & S_s(t) & 0 \\ & & & & & S_s(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

jest macierzą podatności lepkosprężystych materiału o elementach określonych wzorami:

$$S_s(t) = S_s \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_j \int_0^t F_j(t-\vartheta) d\vartheta \right]$$

$$S_1(t) = \frac{2}{3} S_s(t) + \frac{1}{3} S_b = \frac{1}{E} \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_{j1} \int_0^t F_j(t-\vartheta) d\vartheta \right]$$

$$S_2(t) = -\frac{1}{3} S_s(t) + \frac{1}{3} S_b = -\frac{\nu}{E} \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_{j2} \int_0^t F_j(t-\vartheta) d\vartheta \right] \quad (4)$$

przy czym:

$$S_s = \frac{1}{2G}, \quad S_b = \frac{1}{3B}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$F_0(t) = \alpha_0 \int_0^\infty e^{-\alpha_0 u t} u \Lambda(u) du, \quad \Lambda(u) = \frac{1}{\pi \sqrt{u(1+u)}}$$

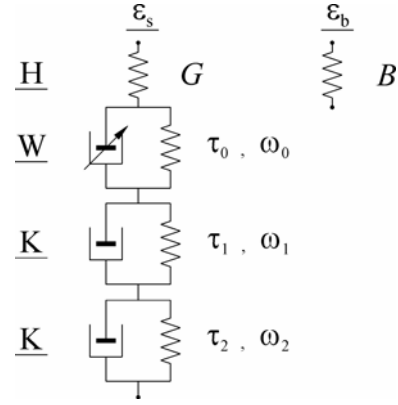
$$F_1(t) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad F_2(t) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 t}$$

$$\omega_{j1} = \frac{2}{3}(1+\nu)\omega_j, \quad \omega_{j2} = \frac{1+\nu}{3\nu}\omega_j, \quad \alpha_j = \frac{1}{\tau_j}, \quad j = 0, 1, 2 \quad (5)$$

We wzorach (4), (5) występują następujące wielkości: E, ν - stałe sprężyste materiału izotropowego (moduł Younga, stała Poissona); G, B - moduł Kirchhoffa (sprężystości postaciowej) i Helmholtza (sprężystości objętościowej); S_s, S_b - podatności sprężyste, postaciowa i objętościowa; $S_s(t)$ - podatność lepkosprężysta postaciowa; $F_0(t)$ - funkcja wykładnicza ułamkowa (z ułamkiem 0,5); $\Lambda(u)$ - funkcja rozkładu czasu retardacji τ_0 ; $F_1(t), F_2(t)$ - funkcje wykładnicze zwykłe; $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ - współczynniki pelzania postaciowego długotrwałego; τ_0, τ_1, τ_2 - czasy retardacji (opóźnienia) odkształceń postaciowych; \otimes - operator splotu.

Funkcje historii naprężenia $F_0(t), F_1(t), F_2(t)$ są z założenia liniowo niezależne; odpowiadają im czasy retardacji różnych rzędów. Funkcja $F_0(t)$ wpływa na odkształcenia krótko-, średnio- i długotrwałe, funkcja $F_1(t)$ - na odkształcenia średnio- i długotrwałe, a funkcja $F_2(t)$ - tylko na odkształcenia długotrwałe.

Model reologiczny HWKK/H jest opisany przez dwie stałe sprężystości E, ν oraz przez 6 stałych lepko-sprężystości $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \tau_0, \tau_1, \tau_2$ (rys. 1). Metodologię doświadczalnego wyznaczania tych stałych opisano m.in. w pracy [9]. Wyniki identyfikacji stałych sprężystości i lepko-sprężystości dwóch podstawowych żywic podano w tabeli 1.



Rys. 1. Model mechaniczny odwzorowujący model reologiczny HWKK/H duroplastu [9]

Fig. 1. The mechanical model reflecting the HWKK/H rheological model for resins [9]

TABELA 1. Stałe materiałowe wybranych żywic [9]
TABLE 1. The values of material constants for selected resins [9]

Stała	Epidian 53	Polimal 109
E , GPa	3,14	4,28
ν	0,418	0,363
ω_0	0,19	0,52
ω_1	0,16	0,40
ω_2	1,24	1,28
τ_0 , h	3,13	1,69
τ_1 , h	55,1	69,8
τ_2 , h	2480	2590

Funkcja rozkładu czasu retardacji $\Lambda(u)$ określona wzorem (5)₆ jest funkcją malejącą, o przebiegu zbliżonym do funkcji hiperbolicznej, a więc o przebiegu zupełnie innym niż funkcja rozkładu masy cząsteczkowej duroplastu. W pracy [2] sformułowano hipotezę (bez dowodu), że funkcja rozkładu czasu retardacji powinna być zgodna jakościowo z funkcją rozkładu masy cząsteczkowej. Autor niniejszej pracy uważa, że taki związek nie występuje, ponieważ funkcja podcałkowa $\Lambda(u)$ we wzorze (5)₅ odnosi się do całego continuum duroplastu, a więc jednocześnie do makrocząstek o różnych masach cząsteczkowych. Funkcja $\Lambda(u)$ determinuje prędkości odkształceń w czasie continuum duroplastu (omówione w dalszych rozważaniach), a nie rozkład masy cząsteczkowej. Ponadto, w modelu HWKK/H

funkcja wykładnicza ułamkowa obejmuje tylko część mechanizmów lepkosprężystych w continuum duroplastu, ujawniających się w formie procesów krótkotrwałych. Pozostałe mechanizmy, ujawniające się w formie procesów średniotrwałych i długotrwałych, są modelowane przez dwie funkcje wykładnicze zwykłe.

SYMULACJA PROCESÓW REOLOGICZNYCH STEROWANYCH NAPRĘŻENIAMI

Syntetyczne wzory macierzowe (2), (3) wymagają przekształcenia do postaci, z której wyniknie proponowany algorytm symulacji odkształceń sterowanych naprężeniami. W tym celu napiszmy w postaci jawnej - na podstawie wzorów (2)-(4) - np. formuły całkowe określające pierwszy i czwarty element wektora ϵ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}(t) &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{11}(t) + \sum_{j=0}^2 \omega_{j1} \int_0^t F_j(t-\vartheta) \sigma_{11}(\vartheta) d\vartheta \right] + \\ &- \frac{\nu}{E} \left[\sigma_{22}(t) + \sum_{j=0}^2 \omega_{j2} \int_0^t F_j(t-\vartheta) \sigma_{22}(\vartheta) d\vartheta \right] + \\ &- \frac{\nu}{E} \left[\sigma_{33}(t) + \sum_{j=0}^2 \omega_{j2} \int_0^t F_j(t-\vartheta) \sigma_{33}(\vartheta) d\vartheta \right] \\ \epsilon_{23}(t) &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{23}(t) + \sum_{j=0}^2 \omega_{j2} \int_0^t F_j(t-\vartheta) \sigma_{23}(\vartheta) d\vartheta \right] \end{aligned} \quad (6)$$

We wzorach (6) występują całki typu

$$I_j = \int_0^t F_j(t-\vartheta) \sigma(\vartheta) d\vartheta, \quad j=0, 1, 2 \quad (7)$$

Funkcje historii naprężenia $F_1(t), F_2(t)$ są funkcjami wykładniczymi zwykłymi. Dla większości funkcji podstawowych $\sigma(t)$ całki I_1, I_2 są określone analitycznie wzorami zamkniętymi. Odmienne zachowuje się całka niewłaściwa I_0 , która może być obliczona tylko numerycznie. Ze względu na warunek

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_0(t) = \infty \quad (8)$$

wynik bezpośredniego numerycznego obliczenia całki I_0 może być obciążony dużym błędem [2].

W niniejszej pracy proponujemy jednolity numeryczny algorytm symulacji procesów reologicznych w duroplastach, w którym wykorzystamy zasadę superpozycji Boltzmanna dla materiałów liniowo lepkosprężystych, wynik symulacji pełzania klasycznego oraz kwadraturę Gaussa wysokiego stopnia.

W przypadku skokowego przyłożenia stałego naprężenia w chwili $t = 0$, tj.

$$\sigma(t) = \sigma H(t), \quad \sigma = \text{const} \quad (9)$$

otrzymuje się

$$I_j = \int_0^t F_j(t-\vartheta) \sigma d\vartheta = \sigma \int_0^t F_j(\vartheta) d\vartheta = \sigma \varphi_j(t) \quad (10)$$

$$j = 0, 1, 2$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1 - \int_0^\infty e^{-\alpha_0 u t} \Lambda(u) du = 1 - I_3(\alpha_0 t), \quad \varphi_1(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t} \\ \varphi_2(t) &= 1 - e^{-\alpha_2 t} \end{aligned}$$

są funkcjami pełzania przyporządkowanymi kolejnym funkcjom tworzącym. Funkcja $\varphi_0(t)$ spełnia następujące warunki [1, 2]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \int_0^t F_0(\vartheta) d\vartheta, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_0(t) = \int_0^\infty F_0(\vartheta) d\vartheta = 1 \\ \varphi_0(0) &= 1 - \int_0^\infty \Lambda(u) du = 1 - 1 = 0, \quad \dot{\varphi}_0(t) = F_0(t) \\ \dot{\varphi}_0(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} F_0(t) = \infty \end{aligned} \quad (12)$$

Wzory (12)_{1,4} są ogólnymi warunkami nałożonymi na każdą funkcję tworzącą, natomiast warunek (12)₅ jest cechą charakterystyczną funkcji wykładniczej ułamkowej. W pracy [2] prezentowany jest pogląd, że warunek (12)₅ jest niezgodny z rzeczywistością. Autor niniejszej pracy uważa, że z fizycznego punktu widzenia warunek (12)₅ jest poprawny, ponieważ w chwili skokowego przyrostu naprężenia prędkość odkształcenia jest nieskończona, czyli $\dot{\varphi}_0(0) = \infty$. Jednak idealnego skoku Heaviside'a nie da się praktycznie zrealizować, dlatego wartości prędkości odkształcenia są w rzeczywistości skończone. Nagłe przyłożenie naprężenia jest idealizacją procesów rzeczywistych, ułatwiającą modelowanie quasi-statycznych procesów reologicznych.

Całka $I_3(\alpha_0 t)$, występująca w formule określającej $\varphi_0(t)$, jest niewłaściwa z dwóch powodów, mianowicie górna granica jest nieskończona oraz

$$\lim_{u \rightarrow 0_+} \Lambda(u) = \infty \quad (13)$$

Proponowany sposób przekształcenia i numerycznego obliczenia tej całki jest następujący:

$$\begin{aligned}
I_3(\alpha_0 t) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_0 u t} \Lambda(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_0 u t}}{\sqrt{u}(1+u)} du \\
\sqrt{u} &= y, \quad du = 2\sqrt{u} dy, \quad u = y^2 \Rightarrow I_3(\alpha_0 t) = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_0 t y^2}}{1+y^2} dy \\
y(x) &= \frac{1+x}{1-x}, \quad dy = \frac{2}{(1-x)^2} dx, \quad f(x; \alpha_0 t) = \\
&= \frac{e^{-\alpha_0 t y^2(x)}}{(1-x)^2 [1+y^2(x)]} \\
I_3(\alpha_0 t) &= \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 f(x; \alpha_0 t) dx \approx \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N_g} w_k f(h_k; \alpha_0 t)
\end{aligned} \tag{14}$$

gdzie: w_k, h_k - wagi i odcięte N_g - punktowej kwadratury Gaussa, równoważnej z aproksymacją funkcji $f(x; \alpha_0 t)$ wielomianem stopnia $2N_g + 1$. Warunek kontrolny ma postać

$$I_3(0) = \int_0^{\infty} \Lambda(u) du = 1 \tag{15}$$

W przypadku skokowego przyłożenia stałego naprężenia w chwili $t = s > 0$ wzory (9, 10) modyfikują się do postaci

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \sigma H(t-s), \quad \sigma = \text{const} \\
I_j &= \int_0^t F_j(t-\vartheta) \sigma(\vartheta) d\vartheta = \sigma \int_s^t F_j(t-\vartheta) d\vartheta = \\
&= \sigma \int_0^{t-s} F_j(\vartheta) d\vartheta = \sigma \varphi_j(t-s)
\end{aligned} \tag{16}$$

gdzie $H(t-s)$ jest funkcją jednostkową Heaviside'a. Dla $t \leq s$ należy zatem przyjąć $\varphi_j(t-s) = 0 \Rightarrow I_j = 0$.

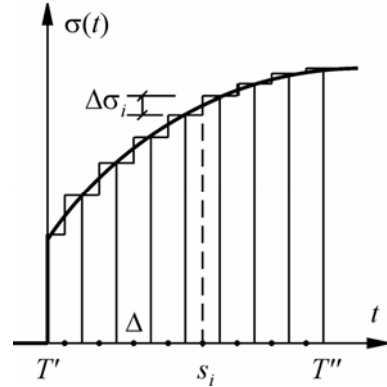
Dowolną ciągłą funkcję naprężenia $\sigma(t)$, $t \in [T', T'']$ można aproksymować funkcją schodkową, co ogólnie zaprezentowano na rysunku 2. Krok dyskretyzacji funkcji ciągłej

$$\Delta = \frac{T'' - T'}{n} \tag{17}$$

powinien być odpowiednio mały, tak aby zapewnić ciągłą wizualizację funkcji $\sigma(t)$ oraz wysoką dokładność symulacji procesu reologicznego. Wynik aproksymacji ma postać:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \sum_{i=1}^N \Delta \sigma_i H(t-s_i) \\
s_{N'+i} &= T' + (i - \frac{1}{2}) \Delta, \quad \Delta \sigma_{N'+i} = \sigma(T' + i\Delta) - \sigma[T' + (i-1)\Delta] \\
i &= 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

gdzie n jest liczbą kroków dyskretyzacji funkcji w przedziale $t \in [T', T'']$, N' jest liczbą przyrostów naprężenia w przedziale $t \in [0, T']$, N jest liczbą przyrostów naprężenia w czasie trwania procesu $t \in [0, T]$.



Rys. 2. Aproksymacja funkcji ciągłej $\sigma(t)$ funkcją „schodkową”

Fig. 2. Approximation of a continuous function, $\sigma(t)$, with a staircase function (19)

Przy sterowaniu pełnym wektorem naprężeń:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \sum_{i=1}^N \Delta \sigma_i H(t-s_i) \\
\Delta \sigma_i &= \text{col}(\Delta \sigma_{11,i}, \Delta \sigma_{22,i}, \Delta \sigma_{33,i}, \Delta \sigma_{23,i}, \Delta \sigma_{13,i}, \Delta \sigma_{12,i})
\end{aligned} \tag{19}$$

standardowe równania konstytutywne (2) przyjmą postać nadającą się do algorytmizacji:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}(t-s_i) \Delta \boldsymbol{\sigma}_i$$

$$\mathbf{R}(t-s_i) = \begin{bmatrix} R_1(t-s_i) & R_2(t-s_i) & R_2(t-s_i) & 0 & 0 & 0 \\ & R_1(t-s_i) & R_2(t-s_i) & 0 & 0 & 0 \\ & & R_1(t-s_i) & 0 & 0 & 0 \\ & & & R_s(t-s_i) & 0 & 0 \\ & & & & R_s(t-s_i) & 0 \\ \text{sym.} & & & & & R_s(t-s_i) \end{bmatrix}$$

$$R_1(t-s_i) = \frac{1}{E} \left[H(t-s_i) + \sum_{j=0}^2 \omega_{j1} \varphi_j(t-s_i) \right]$$

$$R_2(t-s_i) = -\frac{\nu}{E} \left[H(t-s_i) + \sum_{j=0}^2 \omega_{j2} \varphi_j(t-s_i) \right]$$

$$R_s(t-s_i) = \frac{1}{2G} \left[H(t-s_i) + \sum_{j=0}^2 \omega_{j3} \varphi_j(t-s_i) \right]$$

Dla $t-s_i \leq 0$ otrzymuje się $\mathbf{R}(t-s_i) = \mathbf{0}$.

Symulację procesu reologicznego sterowanego dowolnym wektorem naprężeń należy prowadzić, przyjmując odpowiednio mały krok czasowy symulacji δ , tak aby skoki naprężeń, np. nawrót, ujawniły się w postaci quasi-pionowych odcinków. Funkcja pełzania $\varphi_0(t)$, odpowiadająca funkcji wykładniczej ułamkowej, jest generowana jednokrotnie w punktach symulacji $t_l = l\delta$, $l=1, 2, \dots, N_s$; $N_s = T/\delta$. W ten sposób tworzona jest w ułamku sekundy wirtualna tablica tej funkcji, która następnie wykorzystywana jest wielokrotnie, zgodnie ze wzorami (20).

W szczególnym przypadku jednoosiowego rozciągania, tzn. gdy $\boldsymbol{\sigma}(t) = \text{col}[\sigma_{11}(t), 0, 0, 0, 0, 0]$, na podstawie wzorów (20) otrzymuje się:

$$\varepsilon_{11}(t) = \sum_{i=1}^N R_1(t-s_i) \sigma_{11,i} \quad (21)$$

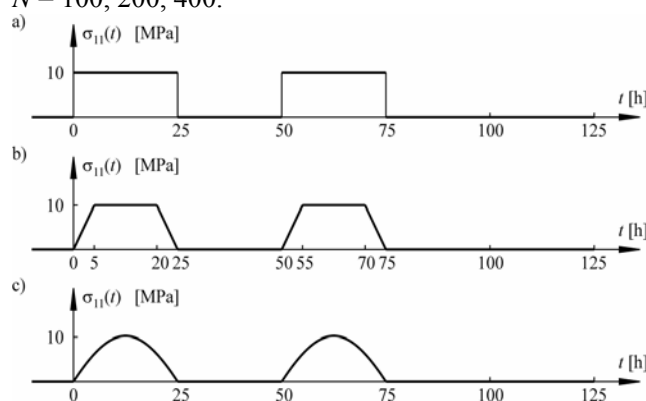
$$\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t) = \sum_{i=1}^N R_2(t-s_i) \sigma_{11,i} \quad (20)$$

TESTOWANIE ALGORYTMU SYMULACJI

Na podstawie wzorów (1, 5, 11, 14, 17-21) opracowano komputerowy algorytm symulacji procesu reologicznego sterowanego dowolnym programem naprężenia. Algorytm zaprogramowano w języku Pascal. Na podstawie testów wstępnych odnoszących się do całki $I_3(0)$ (wzór (15)) ustalono, że 15-punktowa kwadratura Gaussa gwarantuje wyniki quasi-ściśle. Błąd obliczeń

numerycznych jest rzędu 10^{-r} , gdzie r jest liczbą cyfr znaczących zadeklarowanych wartości wag i odciętych punktów Gaussa. W programie komputerowym wagi i odcięte punktów Gaussa zadeklarowano z dokładnością 10 cyfr znaczących ($r=10$).

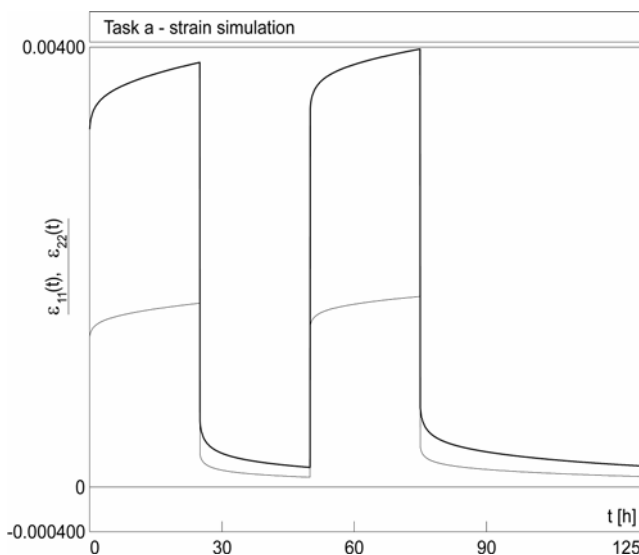
Obliczenia testowe wykonano w odniesieniu do żywicy epoksydowej Epidian 53, o stałych materiałowych zestawionych w tabeli 1. Symulowano rozciąganie jednoosiowe zgodnie ze wzorami (21), tak dobierając parametry programów naprężenia, aby w odpowiedzi materiału ujawniły swój wpływ wszystkie trzy funkcje tworzące F_0, F_1, F_2 . Testowane programy naprężenia przedstawiono na rysunku 3. Jest to dwukrotne przyłożenie naprężenia o maksymalnej wartości 10 MPa, z dwukrotnym nawrotem, przy czym drugi nawrót trwa dwukrotnie dłużej. W zadaniu (a) naprężenie jest przykładane i zdejmowane skokowo, a więc $N=4$ i odpowiedź materiału wyznaczona za pomocą wzorów (21) jest quasi-ściśla. W zadaniu (b) naprężenie jest przykładane lub zdejmowane liniowo w czasie 5 h. Obliczenia wykonano, przyjmując $n=20, 40, 80$, co odpowiada $N=80, 160, 320$. W zadaniu (c) naprężenie przykładano w formie półfal sinusoidy, a więc w tym przypadku skoki w odpowiedzi materiału nie występują. Obliczenia wykonano, przyjmując $n=50, 100, 200$, co odpowiada $N=100, 200, 400$.



Rys. 3. Programy naprężenia w jednoosiowym rozciąganiu żywicy epoksydowej Epidian 53

Fig. 3. Stress programmes in uniaxial tension for Epidian 53 epoxy resin

W symulacji przyjęto $T=125$ h, $\delta=0,05$ h, $N_s=2500$. Czas symulacji na komputerze (PC, Pentium 4, 1.3 GHz) trwał od 0,1 do 4 s w zależności od zadania i wartości N . Wybrane quasi-ściśle wyniki symulacji pokazano na rysunkach 4-6, a w tabeli 2 podano końcowe wartości odkształceń kierunkowych, zależne od n . Wykresy narysowane linią grubą odnoszą się do $\varepsilon_{11}(t)$, a linią cienką - do $\varepsilon_{22}(t)$. W zadaniach (b), (c) uzyskano bardzo dobrą zbieżność symulacji przy zwiększaniu n (tab. 2).

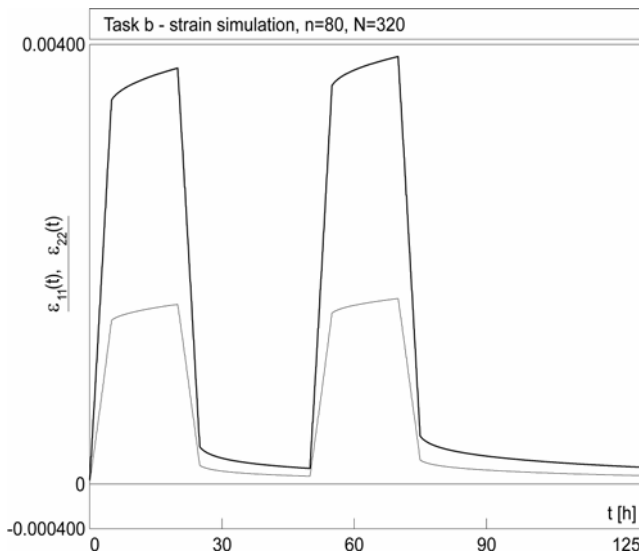


Rys. 4. Symulacja odkształceń odpowiadających programowi naprężenia (a) jak na rys. 3

Fig. 4. Simulation of the strains excited by the (a) stress programme shown in Fig. 3

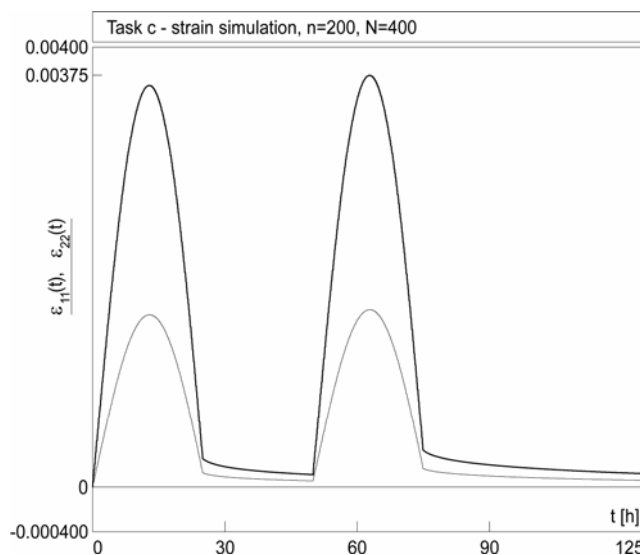
Przedstawione wyniki zadań testowych świadczą o tym, że proponowany algorytm symulacji procesów reologicznych w duroplastach jest bardzo ogólny, jednocześnie prosty do zaprogramowania i prowadzi do rozwiązań quasi-ściślych w relatywnie krótkim czasie. Jest zatem przydatny do praktycznego stosowania.

Algorytm może być łatwo przeformułowany na symulację dowolnych procesów reologicznych sterowanych odkształceniami lub w sposób kombinowany (na przemian naprężeniami i odkształceniami).



Rys. 5. Symulacja odkształceń odpowiadających programowi naprężenia (b) jak na rys. 3

Fig. 5. Simulation of the strains excited by the (b) stress programme shown in Fig. 3



Rys. 6. Symulacja odkształceń odpowiadających programowi naprężenia (c) jak na rys. 3

Fig. 6. Simulation of the strains excited by the (c) stress programme shown in Fig. 3

TABELA 2. Końcowe wartości odkształceń kierunkowych w zadaniach testowych (a), (b), (c)

TABLE 2. The end values of the directional strains in testing problems (a), (b) and (c)

Test	n	N	$\varepsilon_{11}(t) \cdot 10^4$	$\varepsilon_{22}(t) \cdot 10^4$
a	4	4	1,9176	-0,9588
b	20	80	1,5309	-0,7654
	40	160	1,5310	-0,7655
	80	320	1,5310	-0,7655
c	50	100	1,2170	-0,6085
	100	200	1,2173	-0,6086
	200	400	1,2174	-0,6086

Praca wykonana w ramach projektu badawczego KBN Nr 3 T08E 001 27.

LITERATURA

- [1] Wilczyński A.P., Mechanika polimerów w praktyce konstrukcyjnej, WNT, Warszawa 1984.
- [2] Garbarski J., Opis zjawisk lepkosprężystości liniowej polimerów konstrukcyjnych, PN PW serii Mechanika, z. 122, WPW, Warszawa 1990.
- [3] Żuchowska D., Polimery konstrukcyjne, WNT, Warszawa 2000.
- [4] Klasztorny M., Wilczyński A.P., Witemberg-Perzyk D., A rheological model of polymeric materials and identification of its parameters, J. of Theoret. & Applied Mech. 2001, 39, 1, 13-32.
- [5] Klasztorny M., Gieleta R., The HWKK rheological model for resins, J. of Theoret. & Applied Mech. 2002, 40, 3, 939-960.
- [6] Klasztorny M., Warianty równań konstytutywnych sprężystości i lepkosprężystości duroplastów, Mat. V Konf. Kompozyty polimerowe, Wisła 2005, 105-120.
- [7] Wilczyński A.P., Klasztorny M., Determination of complex compliances of fibrous polymeric composites, J. Composite Materials 2000, 34, 1, 1-27.

- [8] Kłasztorny M., Wilczyński A.P., Constitutive modelling of polymeric resins based on shear and bulk creep, 2nd European Conf. on Computational Mechanics ECCM-2001, in: CD Proceed. Minisymposium 27, Paper No 111, Cracow 2001, 1-14.
- [9] Kłasztorny M., Constitutive modelling of resins in compliance domain, *J. Mech. Composite Materials* 2004, 40, 4, 349-358.
- [10] Kłasztorny M., Constitutive modelling of resins in stiffness domain, *J. Mech. Composite Materials* 2004, 40, 5, 443-452.
- [11] Kłasztorny M., Wilczyński A.P., Constitutive equations of viscoelasticity and estimation of viscoelastic parameters of unidirectional fibrous composites, *J. Composite Materials* 2000, 34, 19, 1624-1639.
- [12] Kłasztorny M., Piekarski R., Warianty równań konstytutywnych sprężystości i lepkość sprężystości polimerowych kompozytów włóknistych, *Mat. V Konf. Kompozyty polimerowe, Wisła 2005*, 121-150.

Recenzent
Stanisław Mazurkiewicz