

Robert Piekarski¹

Politechnika Warszawska, Instytut Mechaniki i Konstrukcji, ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa, e-mail: rpie1@wp.pl

PORÓWNANIE WYBRANYCH TEORII SZTYWNOŚCI KOMPOZYTÓW *FRP

W pracy rozpatruje się kompozyty typu *FRP, tzn. tworzywa sztuczne wzmocnione włóknem ciągłym ułożonym jednokierunkowo. Omówiono rozwój dwóch grup teorii sztywności tych materiałów, bazujących na mechanice technicznej (TM*) oraz na mechanice ośrodków ciągłych (MCM*). Na podstawie literatury podano wzory końcowe teorii TM1, TM2 oraz zaproponowano kolejną teorię TM3. Rozwinięto teorię quasi-ściśłą MCM3 poprzez wprowadzenie reprezentatywnej walcowej klatki kompozytu równoważnej objętościowo klatce heksagonalnej oraz wyznaczenie optymalnej postaci warunku zgodności w trzecim zadaniu typu Lamé. Uzyskano dobrą zgodność wyników symulacji według teorii MCM3 z wynikami eksperymentalnymi. Porównano wartości stałych sprężystych kompozytów PFRP, GFRP, CFRP przewidywane według teorii TM1, TM2, TM3 z wartościami według teorii MCM3. Wykazano, że w makromechanice kompozytów *FRP stałe sprężyste E_{11} , ν_{21} mogą być przewidywane według teorii TM1, natomiast stałe E_{22} , ν_{32} , G_{12} powinny być przewidywane według teorii MCM3.

Słowa kluczowe: kompozyty *FRP, teorie sztywności, homogenizacja, stałe sprężyste, analiza porównawcza

COMPARATION OF SELECTED STIFFNESS THEORIES OF *FRP COMPOSITES

The article concerns *FRP composites, i.e. unidirectional long fibre - reinforced plastics. The following assumptions are made. A composite is a matrix - fibre two-phase material. Manufacturing technologies protect full contact between fibres and a matrix. Fibres, a matrix and a composite are treated as linearly elastic materials. A matrix is made of a duroplast and modelled as a uniform and isotropic material. A fibre is considered as a uniform and monotropic material. Fibres are rectilinear and packed uniformly in a hexagonal scheme. After homogenization, a composite is modelled as a uniform and monotropic material, with a monotropy axis coinciding the direction of fibres' alignment. The state-of-the art of two basic groups of stiffness theories of *FRP composites is described. The TM* theories are based on technical mechanics. The MCM* theories are based on mechanics of continuous media (theory of elasticity). Sets of final formulae related to the TM1 and TM2 theories are collected from references (Eqs (1, 2)). The TM3 stiffness theory is developed (Figs. 1-4, Eqs (3-6)). The MCM3 quasi-exact theory has been developed, via incorporating the real fibre volume ratio and deriving the optimal form of the compatibility condition in the 3rd Lamé task. Three composites, PFRP, GFRP and CFRP, have been analysed. Prediction of values of the elastic constants of these composites from the MCM3 theory has been confirmed positively by the experimental data available (Table 1, Fig. 5). The predicted values of the elastic constants according to the TM1, TM2 and TM3 theories have been compared to the results obtained from the MCM3 theory (Table 2, Fig. 5). It has been pointed out that the E_{11} , ν_{21} elastic constants can be predicted from the TM1 theory whereas the E_{22} , ν_{32} , G_{12} constants should be predicted from the MCM3 theory.

Keywords: *FRP composites, stiffness theories, homogenization, elastics constants, comparative analysis

WSTĘP

Kompozyty polimerowe typu *FRP (*long fibre - reinforced plastics*), m.in. GFRP, CFRP, KFRP, BFRP, PFRP [1-3], są złożone z dwóch składników, a mianowicie matrycy będącej tworzywem sztucznym oraz włókien ułożonych jednokierunkowo. W makromechanice laminatów wykorzystuje się monotropowy model ciągły kompozytu *FRP, opisany przez 5 stałych sprężystych. Wyznaczenie tych stałych jako funkcji stałych sprężystych matrycy i włókien, a także objętościowego stopnia wzmocnienia i schematu upakowania włókien nazywa się teorią sztywności kompozytu *FRP [1-3].

Sformułowanie teorii sztywności oraz teorii wytrzymałości kompozytu *FRP należy do głównych zadań mikromechaniki tego typu materiału. Można wyróżnić następujące teorie sztywności kompozytu *FRP:

- teorie bazujące na mechanice technicznej (teorie TM*),
- teorie bazujące na mechanice ośrodków ciągłych (teorie MCM*),
- teorie bazujące na metodach numerycznych,
- teorie brzegowania,
- teorie półempiryczne i empiryczne.

Powyższa klasyfikacja jest zbliżona do klasyfikacji zaproponowanej przez Daniela i Ishaiego [3].

W pierwszych dwóch grupach teorii sztywności kompozytu *FRP uzyskuje się formuły analityczne określające stałe sprężyste kompozytu po homogenizacji jako funkcje ww. parametrów kompozytu przed homogenizacją. Teorie MCM* prowadzą do formuł znacznie bardziej złożonych niż teorie TM*. Utrudnia to ich stoso-

¹ dr inż.

wanie w praktyce inżynierskiej. Ponadto, zastosowanie teorii TM* znacznie uprościłoby modelowanie kompozytu *FRP w zakresie lepkosprężystym, z wykorzystaniem analogii sprężystej - lepkosprężystej [4]. Stąd cel niniejszej pracy, tj. porównanie wybranych teorii sztywności TM* i MCM* z uwzględnieniem dostępnych wyników eksperymentalnych.

Teorie oparte na metodach numerycznych, m.in. FEM, BEM, FDM, prowadzą do dokładnych predykcji stałych sprężystych kompozytu, ale nie otrzymuje się formuł analitycznych. Zastosowanie FEM prezentuje publikacja [5]. Jedną z pierwszych prac, w której sformułowano teorię brzegowania, tj. wyznaczenia obszarów wartości (brzegów) stałych sprężystych kompozytu, jest praca Hashina i Rosena [6].

Teorie półempiryczne łączą wyniki empiryczne z wynikami teorii pierwszej lub drugiej grupy. Należą do nich formuły Halpina-Tsaia [3], uwzględniające odchylenie włókien od prostoliniowości oraz częściowe przyleganie włókien do matrycy. Wadą tego podejścia jest odniesienie formuł do konkretnego kompozytu. Teorie empiryczne prowadzą do relatywnie dokładnych wyników, ale bez możliwości sformułowania zależności funkcyjnych stałych sprężystych kompozytu od stałych sprężystych matrycy i włókien.

ZAŁOŻENIA

W modelowaniu kompozytu *FRP w zakresie sprężystym przyjęto następujące założenia:

- Kompozyt FRP jest materiałem dwufazowym matryca-włókno ciągłe. Technologia wytwarzania kompozytu zapewnia dwustronność więzów na granicy faz.
- Składniki kompozytu oraz kompozyt są materiałami liniowo-sprężystymi. Matryca jest polimerem usieciowanym (duroplast), jednorodnym i izotropowym. Włókno jest materiałem jednorodnym monotropowym.
- Włókna są prostoliniowe, upakowane w matrycy jednokierunkowo, równomiernie, w schemacie heksagonalnym.
- W wyniku homogenizacji kompozytu otrzymuje się materiał jednorodny makroskopowo, monotropowy, o osi monotropii pokrywającej się z kierunkiem ułożenia włókien.

W odniesieniu do kompozytu *FRP wprowadzamy lokalny prawoskrętny kartezjański układ współrzędnych $x_1x_2x_3$, przy czym: x_1 - oś równoległa do kierunku ułożenia włókien (oś monotropii kompozytu po homogenizacji), x_2x_3 - płaszczyzna prostopadła do kierunku ułożenia włókien (płaszczyzna poprzecznej izotropii kompozytu po homogenizacji).

Stan naprężenia i odkształcenia w punkcie kompozytu przed lub po homogenizacji określają wektory

utworzone ze składowych tensorów naprężenia i odkształcenia:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \text{col}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \text{col}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})\end{aligned}\quad (1)$$

Zgodnie z konwencją tensorową, ε_{ii} jest wydłużeniem względnym, ε_{ij} jest połową kąta odkształcenia postaciowego elementu różniczkowego $dx_1dx_2dx_3$, przy czym $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.

STAŁE SPRĘŻYSTOŚCI ORAZ OBJĘTOŚCIOWY STOPIEŃ WZMOCNIENIA

Matryca - jako materiał izotropowy - opisana jest przez dwie stałe sprężyste: E - moduł Younga (sprężystości wzdłużnej), ν - stałą Poissona. Moduł Kirchhoffa (sprężystości postaciowej) matrycy wyraża się znany wzorem $G = E/[2(1+\nu)]$.

Włókno jest materiałem monotropowym (w szczególności izotropowym). Osie kartezjańskiego materialnego układu współrzędnych $x_1x_2x_3$ mają następującą interpretację: x_1 - oś monotropii włókna, x_2x_3 - płaszczyzna poprzecznej izotropii włókna. Materiał włókna jest opisany przez 5 niezależnych stałych sprężystych: \bar{E}_{11} - podłużny moduł Younga, \bar{E}_{22} - poprzeczny moduł Younga ($\bar{E}_{22} \ll \bar{E}_{11}$), $\bar{\nu}_{32}$ - stałą Poissona w płaszczyźnie x_2x_3 , $\bar{\nu}_{21}$ - większą stałą Poissona w płaszczyźnie x_1x_2 , \bar{G}_{12} - moduł Kirchhoffa w płaszczyźnie x_1x_2 .

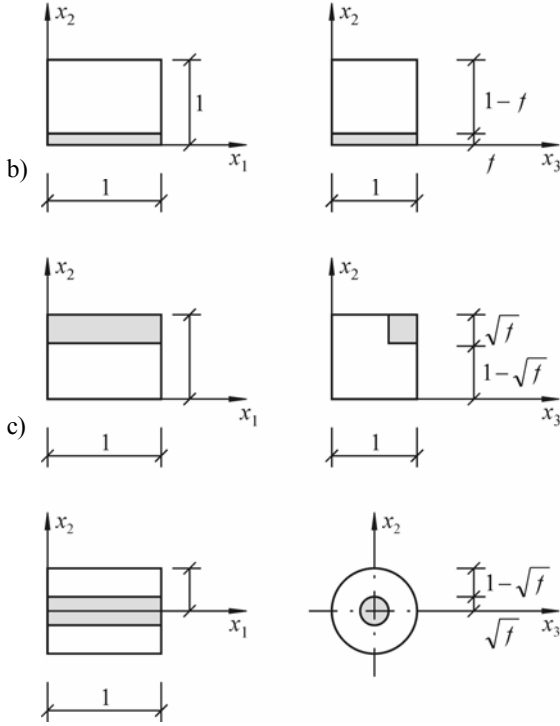
Jednorodny materiał monotropowy, modelujący kompozyt *FRP po homogenizacji (w skali makro), jest opisany przez 5 niezależnych stałych sprężystych: E_{11} - podłużny moduł Younga, E_{22} - poprzeczny moduł Younga ($E_{22} \ll E_{11}$), ν_{32} - stałą Poissona w płaszczyźnie x_2x_3 , ν_{21} - większą stałą Poissona w płaszczyźnie x_1x_2 , G_{12} - moduł Kirchhoffa w płaszczyźnie x_1x_2 .

Indeksy stałych Poissona odpowiadają normalizacji kolumnowej macierzy podatności materiału [7].

TEORIE TM* SZTYWNOŚCI KOMPOZYTÓW *FRP

W teoriach sztywności kompozytu *FRP bazujących na mechanice technicznej przyjmuje się zastępczą reprezentatywną klatkę kompozytu oraz różne założenia upraszczające [1-3, 8]. W większości prac przyjęto włókna izotropowe, co ogranicza zakres zastosowań uzyskanych wzorów, m.in. [1, 2, 8].

W niniejszej pracy rozważymy trzy teorie sztywności (oznaczone symbolami TM1, TM2, TM3) bazujące na mechanice technicznej, którym odpowiadają zastępcze reprezentatywne klatki kompozytu pokazane na rysunku 1. W każdej teorii objętościowy stopień wzmocnienia f odpowiada dokładnie materiałowi *FRP.



Rys. 1. Zastępcze reprezentatywne klatki kompozytu: a) teoria TM1, b) teoria TM2, c) teoria TM3

Fig. 1. Substitute representative cells of the composite: a) the TM1 theory, b) the TM2 theory, c) the TM3 theory

Teoria TM1 została podsumowana w monografiach [3, 8]. Układ wzorów określających stałe sprężyste kompozytu *FRP w ramach tej teorii ma postać:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= f\bar{E}_{11} + (1-f)E \\
 \nu_{21} &= f\bar{\nu}_{21} + (1-f)\nu \\
 \frac{1}{E_{22}} &= \frac{f}{\bar{E}_{22}} + \frac{1-f}{E} \Rightarrow E_{22} = \frac{\bar{E}_{22}E}{fE + (1-f)\bar{E}_{22}} \\
 \frac{1}{G_{12}} &= \frac{f}{\bar{G}_{12}} + \frac{1-f}{G} \Rightarrow G_{12} = \frac{\bar{G}_{12}G}{fG + (1-f)\bar{G}_{12}} \\
 \frac{1}{G_{23}} &= \frac{f}{\bar{G}_{23}} + \frac{1-f}{G} \Rightarrow G_{23} = \frac{\bar{G}_{23}G}{fG + (1-f)\bar{G}_{23}} \\
 \Rightarrow \nu_{32} &= \frac{E_{22}}{2G_{23}} - 1
 \end{aligned} \quad (2)$$

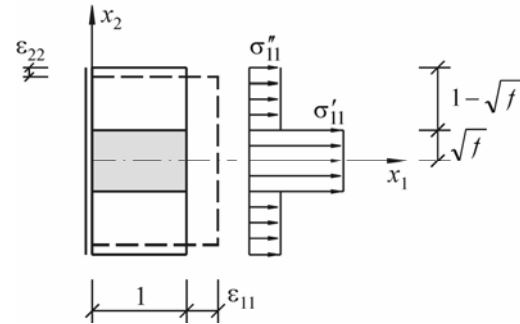
Stałe E_{11}, ν_{21} wyznacza się z rozciągania wzdłużnego przy założeniu płaskiego przekroju poprzecznego. Stałą E_{22} wyznacza się z rozciągania poprzecznego, a stałą G_{12} - ze ścinania wzdłużnego. Stałą G_{23} wyznacza się

w sposób analogiczny jak stałą G_{12} , rozpatrując ścinanie poprzeczne.

Teoria TM2 została sformułowana przez Wilczyńskiego [8] przy założeniu włókien izotropowych. Po uogólnieniu tej teorii na włókna monotropowe układ wzorów końcowych ma postać:

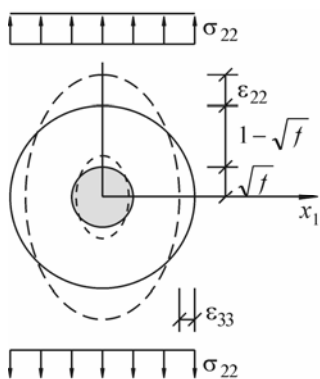
$$\begin{aligned}
 E_{11} &= f\bar{E}_{11} + (1-f)E \\
 \nu_{21} &= \sqrt{f}\bar{\nu}_{21} + (1-\sqrt{f})\nu \\
 E_{22} &= E \frac{\bar{E}_{22}\sqrt{f} + (1-\sqrt{f})E}{\bar{E}_{22}\sqrt{f}(1-\sqrt{f}) + E[1-\sqrt{f}(1-\sqrt{f})]} \\
 G_{12} &= G \frac{\bar{G}_{12}[1-\sqrt{f}(1-\sqrt{f})] + G\sqrt{f}(1-\sqrt{f})}{(1-\sqrt{f})\bar{G}_{12} + G\sqrt{f}} \\
 G_{23} &= G \frac{\bar{G}_{23}\sqrt{f} + (1-\sqrt{f})G}{\bar{G}_{23}\sqrt{f}(1-\sqrt{f}) + G[1-\sqrt{f}(1-\sqrt{f})]} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \nu_{32} &= \frac{E_{22}}{2G_{23}} - 1
 \end{aligned} \quad (3)$$

W niniejszej pracy sformułowano teorię sztywności TM3, której odpowiada walcowa klatka kompozytu, równoważna objętościowo rzeczywistej klatce heksagonalnej. W porównaniu z klatkami w teoriach TM1, TM2, klatka walcowa jest najbliższa rzeczywistej geometrii heksagonalnego upakowania włókien. W rozważaniach wielkości $(\cdot)', (\cdot)'', (\cdot)'''$ odnoszą się odpowiednio do włókna, matrycy i kompozytu w skali makro (po homogenizacji). Rozpatrujemy trzy przypadki wytrzymałościowe: rozciąganie wzdłużne (rys. 2), rozciąganie poprzeczne (rys. 3) i ścinanie wzdłużne (rys. 4).



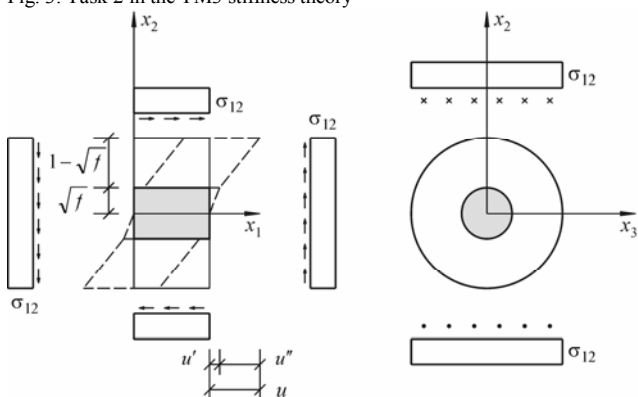
Rys. 2. Zadanie 1 w teorii sztywności TM3

Fig. 2. Task 1 in the TM3 stiffness theory



Rys. 3. Zadanie 2 w teorii sztywności TM3

Fig. 3. Task 2 in the TM3 stiffness theory



Rys. 4. Zadanie 3 w teorii sztywności TM3

Fig. 4. Task 3 in the TM3 stiffness theory

W przypadku rozciągania wzdłużnego (rys. 2) założenia upraszczające przyjęto w postaci:

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon''_{11} = \varepsilon_{11}, \quad \sigma'_{22} = \sigma''_{22} = \sigma_{22} = \sigma'_{33} = \sigma''_{33} = \sigma_{33} = 0 \quad (4)$$

Z warunków zgodności kompozytu przed i po homogenizacji:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11}\pi f + \sigma''_{11}\pi(1-f) &= \sigma_{11}\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{E}_{11}\varepsilon_{11}f + E\varepsilon_{11}(1-f) &= E_{11}\varepsilon_{11} \\ \varepsilon'_{22}\sqrt{f} + \varepsilon''_{22}(1-\sqrt{f}) &= \varepsilon_{22} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\bar{\nu}_{21}\varepsilon_{11}\sqrt{f} - \nu\varepsilon_{11}(1-\sqrt{f}) &= -\nu_{21}\varepsilon_{11} \end{aligned} \quad (5)$$

otrzymuje się:

$$E_{11} = f\bar{E}_{11} + (1-f)E, \quad \nu_{21} = \sqrt{f}\bar{\nu}_{21} + (1-\sqrt{f})\nu \quad (6)$$

W przypadku rozciągania poprzecznego (rys. 3) założenia upraszczające przyjęto w postaci:

$$\sigma'_{22} = \sigma''_{22} = \sigma_{22}, \quad \sigma'_{11} = \sigma''_{11} = \sigma_{11} = \sigma'_{33} = \sigma''_{33} = \sigma_{33} = 0 \quad (7)$$

Z warunków zgodności:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{22}\sqrt{f} + \varepsilon''_{22}(1-\sqrt{f}) &= \varepsilon_{22} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sigma_{22}}{\bar{E}_{22}}\sqrt{f} + \frac{\sigma_{22}}{E}(1-\sqrt{f}) &= \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} \\ \varepsilon'_{33}\sqrt{f} + \varepsilon''_{33}(1-\sqrt{f}) &= \varepsilon_{33} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\bar{\nu}_{32}\varepsilon'_{22}\sqrt{f} - \nu\varepsilon''_{22}(1-\sqrt{f}) &= -\nu_{32}\varepsilon_{22} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\bar{\nu}_{32}\frac{\sigma_{22}}{\bar{E}_{22}}\sqrt{f} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E}(1-\sqrt{f}) &= -\nu_{32}\frac{\sigma_{22}}{E_{22}} \end{aligned} \quad (8)$$

uzyskuje się:

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{\sqrt{f}}{\bar{E}_{22}} + \frac{1-\sqrt{f}}{E}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_{22}} = \sqrt{f}\frac{\bar{\nu}_{32}}{\bar{E}_{22}} + (1-\sqrt{f})\frac{\nu}{E} \quad (9)$$

W przypadku ścinania wzdłużnego (rys. 4) założenia upraszczające mają postać:

$$\sigma'_{12} = \sigma''_{12} = \sigma_{12}, \quad \sigma'_{ii} = \sigma''_{ii} = \sigma_{ii}, \quad i=1,2,3 \quad (10)$$

Z warunku zgodności:

$$\begin{aligned} u' + u'' &= u \Rightarrow \gamma'_{12}\sqrt{f} + \gamma''_{12}(1-\sqrt{f}) = \gamma_{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sigma_{12}}{G_{12}}\sqrt{f} + \frac{\sigma_{12}}{G}(1-\sqrt{f}) &= \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \quad (11)$$

otrzymuje się:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\sqrt{f}}{G_{12}} + \frac{1-\sqrt{f}}{G} \quad (12)$$

Podsumowując, teoria sztywności TM3 kompozytu *FRP prowadzi do następującego układu wzorów na stałe sprężyste kompozytu:

$$\begin{aligned} E_{11} &= f\bar{E}_{11} + (1-f)E \\ \nu_{21} &= \sqrt{f}\bar{\nu}_{21} + (1-\sqrt{f})\nu \\ \frac{1}{E_{22}} &= \frac{\sqrt{f}}{\bar{E}_{22}} + \frac{1-\sqrt{f}}{E} \Rightarrow E_{22} = \frac{\bar{E}_{22}E}{\sqrt{f}E + (1-\sqrt{f})\bar{E}_{22}} \\ \frac{\nu_{32}}{E_{22}} &= \sqrt{f}\frac{\bar{\nu}_{32}}{\bar{E}_{22}} + (1-\sqrt{f})\frac{\nu}{E} \Rightarrow \\ \Rightarrow \nu_{32} &= E_{22}\left[\sqrt{f}\frac{\bar{\nu}_{32}}{\bar{E}_{22}} + (1-\sqrt{f})\frac{\nu}{E}\right] \\ \frac{1}{G_{12}} &= \frac{\sqrt{f}}{G_{12}} + \frac{1-\sqrt{f}}{G} \Rightarrow G_{12} = \frac{\bar{G}_{12}G}{\sqrt{f}G + (1-\sqrt{f})\bar{G}_{12}} \end{aligned} \quad (13)$$

TEORIE MCM* SZTYWNOŚCI KOMPOZYTÓW *FRP

Teorie sztywności MCM* bazują na mechanice ośrodków ciągłych, tzn. klasycznej teorii sprężystości. Pierwsze teorie tego typu, wykorzystujące różne zastęp-

cze modele kompozytu, sformułowane w literaturze przez Van Fo Fy, Skudra'ego i Rocensa, Abolinša, Rabinoviča w latach 60. i 70. ubiegłego wieku, zostały opisane przez Borkowskiego [9]. W literaturze angielskiej opublikowano trzy teorie:

- teorię Hilla [10] (oznaczoną w niniejszym artykule symbolem MCM1),
- teorię Whitneya i Riley'a [11] (oznaczoną symbolem MCM2),
- teorię Wilczyńskiego [12], rozwiniętą przez Lewińskiego [13], Kłasztornego [4], Urbańskiego [14] oraz w niniejszej pracy (oznaczoną symbolem MCM3).

W teorii MCM1 rozpatrywano izotropowe włókno walcowe zanurzone w jednorodnym ośrodku monotropowym modelującym kompozyt *FRP (tzw. *self-consistent model*). Pominięcie matrycy w reprezentatywnej klatce kompozytu jest jednak zbyt dużym uproszczeniem. W teorii MCM2 klatkę kompozytu przyjęto zgodnie z modelem TM3, ale założono włókno izotropowe. Autorzy wyznaczyli stałe E_{11} , ν_{21} , E_{22} , wykorzystując funkcje naprężeń Airy'ego i energetyczne warunki zgodności. Wzór na stałą G_{12} zaczerpnięto z [6].

Wilczyński [12] rozwinął teorię MCM2, wyznaczając komplet 5 stałych sprężystych kompozytu z włóknem izotropowym z czterech zadań typu Lamé: równomierne rozciągania wzdłużnego, osiowosymetrycznego rozciągania poprzecznego, ścinania poprzecznego i ścinania wzdłużnego. Teorię tę rozszerzono na włókna monotropowe w pracy [13]. Pełne analityczne rozwiązanie czterech zadań typu Lamé podano w pracy [4]. Optymalną postać warunku zgodności w trzecim zadaniu typu Lamé wyznaczono w [14].

Reprezentatywną walcową klatkę kompozytu Wilczyński [12] przyjął w postaci walca modelującego włókno, „zanurzonego” w powłoce walcowej modelującej matrycę, przy czym klatka walcowa jest styczna do klatki heksagonalnej. Prowadzi to do zawyżenia objętościowego stopnia wzmocnienia klatki walcowej $f_c \approx 1,103f$. Analogiczną klatkę kompozytu przyjęto w pracach [4, 13, 14].

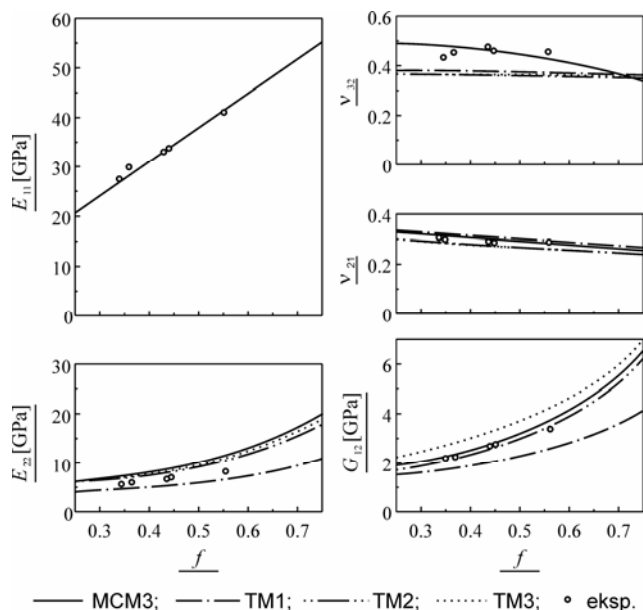
W niniejszej pracy reprezentatywną walcową klatkę kompozytu przyjęto równoważną objętościowo klatce heksagonalnej, tj. $f_c = f$, co eliminuje ww. niezgodność wymiarową kompozytu przed i po homogenizacji. Tak rozumiana klatka jest zanurzona w materiale monotropowym. Identyczną interpretację przyjęli Whitney i Riley [11]. W ramach niniejszej pracy powtórzono podaną w [14] procedurę wyznaczenia optymalnej postaci warunku zgodności w trzecim zadaniu typu Lamé. Optymalna wartość współczynnika kombinacji liniowej maksimum przemieszczenia promieniowego i obwodowego wynosi $\eta = 0,16$ (w pracy [14] otrzymano $\eta = 0,25$). Tak zmodyfikowaną teorię sztywności oznaczymy dalej symbolem MCM3.

ANALIZA PORÓWNAWCZA TEORII SZTYWNOŚCI

Porównanie obejmuje teorie sztywności: TM1, TM2, TM3 i MCM3. Porównanie przeprowadzono w odniesieniu do następujących kompozytów:

- 1) kompozyt PFRP [15]
włókna polietylenowe VHDPE Tenfor SN1A:
 $\bar{E}_{11} = 60,4 \text{ GPa}$, $\bar{E}_{22} = 4,68 \text{ GPa}$
 $\bar{\nu}_{32} = 0,55$, $\bar{\nu}_{21} = 0,38$, $\bar{G}_{12} = 1,65 \text{ GPa}$
matryca: żywica epoksydowa Ciba-Geigy 913:
 $E = 5,55 \text{ GPa}$, $\nu = 0,37$
- 2) kompozyt GFRP [9]
włókna szklane E:
 $\bar{E}_{11} = 73,0 \text{ GPa}$, $\bar{E}_{22} = 73,0 \text{ GPa}$
 $\bar{\nu}_{32} = 0,22$, $\bar{\nu}_{21} = 0,22$, $\bar{G}_{12} = 29,9 \text{ GPa}$
matryca: żywica poliestrowa Polimal 109:
 $E = 3,24 \text{ GPa}$, $\nu = 0,385$
- 3) kompozyt CFRP [16]
włókna węglowe Magnamit HS:
 $\bar{E}_{11} = 215 \text{ GPa}$, $\bar{E}_{22} = 13,8 \text{ GPa}$
 $\bar{\nu}_{32} = 0,10$, $\bar{\nu}_{21} = 0,21$, $\bar{G}_{12} = 13,8 \text{ GPa}$
matryca: żywica epoksydowa Epidian 53:
 $E = 3,14 \text{ GPa}$, $\nu = 0,418$

Stałe sprężyste kompozytów po homogenizacji wyznaczono dla praktycznego przedziału zmienności objętościowego stopnia wzmocnienia, tj. $f = 0,25 \div 0,75$. Ze względu na ograniczoną objętość artykułu przedstawimy tylko część wyników numerycznych i graficznych. Wykresy przewidywanych wartości stałych sprężystych kompozytu GFRP pokazano na rysunku 5 na tle wyników eksperymentalnych zestawionych w tabeli 1. Obliczenia wykonano za pomocą własnych programów komputerowych.



Rys. 5. Stałe sprężyste kompozytu GFRP w funkcji objętościowego stopnia wzmocnienia *f* na tle wartości eksperymentalnych

Fig. 5. Elastic constants of the GFRP composite vs a fibre volume fraction *f* against a background of the experimental values

Teoria MCM3 została potwierdzona eksperymentalnie w stopniu upoważniającym do uznania jej za quasi-scisłą. W tabeli 2 zestawiono wartości maksymalnych błędów względnych dotyczące prognozy według teorii TM1, TM2, TM3 stałych sprężystych analizowanych kompozytów w porównaniu z prognozą według teorii MCM3.

TABELA 1. Dane eksperymentalne dotyczące kompozytu GFRP [9]

TABLE 1. The experimental data concerning the GFRP composite [9]

<i>f</i>	<i>E</i> ₁₁ , GPa	<i>E</i> ₂₂ , GPa	<i>ν</i> ₃₂	<i>ν</i> ₂₁	<i>G</i> ₁₂ , GPa
0,34	27,46	6,08	0,441	0,310	2,18
0,36	29,87	6,37	0,461	0,303	2,26
0,43	33,15	6,96	0,475	0,293	2,72
0,44	34,03	7,26	0,464	0,290	2,76
0,55	40,99	8,53	0,461	0,290	3,38

TABELA 2. Maksymalne błędy względne wartości stałych sprężystych przewidywanych według teorii TM1, TM2, TM3

TABLE 2. Maximum relative errors of the elastic constants values predicted from the TM1, TM2, TM3 theories

Stała sprężysta	TM*	PFRP δ , %	GFRP δ , %	CFRP δ , %
<i>E</i> ₁₁	TM1	0	0	0
	TM2	0	0	0
	TM3	0	0	0
<i>E</i> ₂₂	TM1	4	45	30
	TM2	2	10	18
	TM3	8	5	11
<i>ν</i> ₃₂	TM1	19	22	31
	TM2	22	25	41
	TM3	11	25	38

<i>ν</i> ₂₁	TM1	0	3	0
	TM2	0	9	15
	TM3	0	9	15
<i>G</i> ₁₂	TM1	0	34	29
	TM2	0	11	9
	TM3	5	21	20

Wzory na stałe *E*₁₁, *ν*₂₁ w teorii sztywności TM1, odpowiadające regule mieszanin, mogą być stosowane w makromechanice kompozytów *FRP. Błąd względny δE_{11} jest pomijalny, a $\delta \nu_{21} \leq 3\%$ dla testowanych kompozytów. Stała sprężysta *E*₂₂ jest najlepiej przewidywana według teorii sztywności TM3, ale błąd względny jest dość duży $\delta E_{22} \leq 11\%$. Stała sprężysta *ν*₃₂ jest najlepiej przewidywana według sztywności TM1, ale błąd względny jest za duży, tj. $\delta \nu_{32} \leq 31\%$. Powyższe uwagi świadczą o celowości stosowania teorii quasi-scisłej MCM3 do przewidywania wartości stałych.

Stała sprężysta *G*₁₂ jest najlepiej przewidywana przez teorię TM2, błąd względny $\delta G_{12} \leq 11\%$. Biorąc jednak pod uwagę relatywnie prosty wzór na *G*₁₂, według teorii MCM3, celowe wydaje się stosowanie tego wzoru w makromechanice kompozytów *FRP, tj.

$$G_{12} = G \frac{\bar{G}_{12} + G + f(\bar{G}_{12} - G)}{\bar{G}_{12} + G - f(\bar{G}_{12} - G)} \tag{14}$$

Wzór (14) można znaleźć w pracach [3, 4].

Celowe wydaje się również poszukiwanie uproszczonej teorii sztywności, która pozwoliłaby przewidywać stałe *E*₂₂, *ν*₃₂ z dokładnością wystarczającą w zastosowaniach technicznych.

Praca wykonana w ramach projektu badawczego KBN Nr 3 T08E 001 27 (kierownik projektu prof. M. Kłaszczorny).

LITERATURA

- [1] Jones R.M., Mechanics of composite materials, McGraw-Hill Book Co., 1975.
- [2] Tsai S.W., Composites design, IV Edn., Think Composites, Dayton 1987.
- [3] Daniel I.M., Ishai O., Engineering mechanics of composite materials, Oxford Univ. Press, New York - Oxford 1994.
- [4] Wilczyński A.P., Kłaszczorny M., Determination of complex compliances of fibrous polymeric composites, J. Composite Mat. 2000, 34, 1, 1-27.
- [5] Urbański A., The unified finite element formulation of homogenization of structural members with a periodic microstructure, Cracow Univ. Press, Cracow 2005.
- [6] Hashin Z., Rosen B.W., The elastic moduli of fiber-reinforced materials, J. Applied Mech. 1964, 21, 233-242.
- [7] Muc A., Mechanika kompozytów włóknistych, Księgarnia Akademicka, Kraków 2003.

- [8] Wilczyński A.P., Polimerowe kompozyty włókniste, WNT, Warszawa 1996.
- [9] Borkowski M., Wpływ składu i struktury tworzyw sztucznych wzmocnionych włóknem ciągłym na niektóre właściwości mechaniczne kompozytu (praca doktorska), IMT WMTA PW, Warszawa 1978.
- [10] Hill R., Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials III. Self-consistent model, *J. Mech. Phys. Solids* 1965, 13, 4, 189-198.
- [11] Whitney J.M., Riley M.B., Elastic properties of fiber reinforced composite materials, *AIAA Journal* 1966, 4, 9, 1537--1542.
- [12] Wilczyński A.P., A basic theory of reinforcement for unidirectional fibrous composites, *Composites Science & Technology* 1990, 38, 327-337.
- [13] Wilczyński A.P., Lewiński J., Predicting the properties of unidirectional fibrous composites with monotropic reinforcement, *Composites Science & Technology* 1995, 55, 139-143.
- [14] Kłasztorny M., Urbański A., Application of the finite element method to improve quasi-exact reinforcement theory of fibrous polymeric composites, *J. Mechanics of Composite Materials* 2005, 41, 1, 55-64.
- [15] Kłasztorny M., The inverse problem in the reinforcement theory of fibrous composites, *Composites Science & Technology* 2002, 62, 1, 107-119.
- [16] Kłasztorny M., Piekarski R., Warianty równań konstytutywnych sprężystości i lepkosprężystości polimerowych kompozytów włóknistych, *Mat. V Konf. Kompozyty Polimerowe, Wisła* 2005, 121-150.

Recenzent
Stanisław Mazurkiewicz