

Andrzej P. Wilczyński¹, Marian Klasztorny²

Politechnika Warszawska, Instytut Mechaniki i Konstrukcji, ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa

MODELOWANIE POLIMEROWYCH KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH W ZAKRESIE LEPKOSPĘŻYSTYM

Opracowano analityczną metodę modelowania kompozytu polimerowego, wzmocnionego włóknem ciągłym ułożonym jednokierunkowo (pojedyncza warstwa laminatu). Przyjęto, że osnowa polimerowa jest materiałem izotropowym lepkospężystym, opisanym przez model HWKK, natomiast włókna są wykonane z materiału monotropowego sprężystego. Sformułowano przybliżone równania konstytutywne lepkospężystości kompozytu po homogenizacji, opisane przez 5 stałych sprężystości i 13 stałych lepkospężystości. Opracowano algorytm wyznaczania tych stałych, który zaprogramowano w Pascalu. Podano przykład modelowania kompozytu w zakresie sprężystym i lepkospężystym.

MODELLING OF FIBROUS POLYMERIC COMPOSITES IN THE VISCOELASTIC RANGE

An analytical method for viscoelastic modelling of a fibre-reinforced resin-matrix composite has been developed, based on the Wilczynski's reinforcement theory, the HWKK rheological model for resins and the elastic-viscoelastic analogy. The following assumptions have been adopted: 1) the matrix is a linear viscoelastic isotropic material, described by the HWKK model [6]; 2) the fibres are made of a linear elastic monotropic material, with the direction of monotropy coinciding the fibre's axis; 3) the fibres are uniformly distributed in a hexagonal scheme; 4) the matrix - fibres contact is protected during loading; 5) an ultra-thin intermediate layer between the matrix and the fibre is neglected; 6) the homogenised composite is modelled as a linear viscoelastic monotropic material, with the direction of monotropy coinciding the fibres' alignment. The Wilczynski's reinforcement theory, used in the method of viscoelastic modelling, is based on four tasks of the Lamé type and Hill's assumption.

Constitutive equations of viscoelasticity, describing the HWKK model of a resin matrix, are formulated in the shear-bulk description (Eqs (1)-(5)), using three generating functions, i.e. a fractional exponential function and two normal exponential functions. This model, reflecting short-lasting and long-lasting first-rank reversible creep, is described by 9 material constants [6], collected in Table 1 for two basic resins (epoxy and polyester). The approximate constitutive equations for the homogenised composite, described by 5 elastic constants and 13 viscoelastic constants, have been formulated as Eqs (6), (7). An analytic method, for deriving the viscoelastic constants of the final material, is composed of five stages: 1) analytic derivation of the elastic compliances of the composite; 2) analytic derivation of the shear and bulk complex compliances of the matrix; 3) analytic derivation of the exact complex compliances of the composite, using the elastic - viscoelastic analogy; 4) analytic derivation of the approximate complex compliances of the composite; 6) analytic derivation of 10 viscoelastic constants of the homogenised composite. The results of viscoelastic modelling of a composite are verified by comparison of the approximate and the exact complex compliances of the composite. All stages have been described in detail (Eqs (9)-(18)).

A computer aided algorithm for estimation of the composite's material constants has been formulated, programmed and tested on selected materials. The results of modelling, with the obtained high accuracy, for the VHDPE Tenfor SN1A polyethylene/Epidian 53 epoxy composite are presented (Fig. 1).

WSTĘP

Kompozyty polimerowe, wzmocnione włóknem ciągłym ułożonym jednokierunkowo, oznaczone w niniejszej pracy symbolem PKW, przejawiają właściwości lepkospężyste, wynikające przede wszystkim z relatywnie dużych odkształceń lepkospężystych osnowy. Koncepcję modelowania PKW w zakresie lepkospężystym opracował Wilczyński i opublikował w pracach [1-3]. Rozwinięcie tej koncepcji oraz rozwiązanie problemów szczegółowych zawierają prace [4-6].

Na podstawie badań eksperymentalnych własnych, przeprowadzonych na próbkach prętowych wykonanych z żywicy epoksydowej lub poliestrowej, rozciąganych

jednoosiowo w temperaturze pokojowej, wykazano, że przy poziomach naprężeń rozciągających $\sigma \leq 0,3R_m$ (R_m - wytrzymałość doraźna na rozciąganie) występuje tylko pełzanie pierwszorzędowe odwracalne. W pracy [6] opracowano model reologiczny żywicy epoksydowej i poliestrowej, oznaczony symbolem HWKK, odwzorowujący z dużą dokładnością ww. warunki. Model HWKK, opisany przez 2 stałe sprężyste oraz 7 stałych lepkospężystych, zastosowano do modelowania osnowy PKW.

nych z żywicy epoksydowej lub poliestrowej, rozciąganych

¹ prof. dr hab. inż., ² dr hab. inż.

STRUKTURA KOMPOZYTU I ZAŁOŻENIA

Kompozyt składa się z osnowy i włókien ciągłych, ułożonych jednokierunkowo. Osnowa jest żywicą epoksydową lub poliestrową, które należą do polimerów amorficznych termoutwardzalnych. Włókna mogą być m.in. węglowe, polietylenowe lub szklane.

W modelowaniu PKW w zakresie sprężystym i lepkosprężystym przyjęto następujące założenia:

1. Osnowa jest materiałem izotropowym, liniowo lepkosprężystym, opisanym przez model HWKK.
2. Włókna są wykonane z materiału monotropowego, liniowo sprężystego, o kierunku monotropii pokrywającym się z osią włókna.
3. Rozmieszczenie włókien w osnowie jest równomierne, heksagonalne w przekroju.
4. Po obciążeniu kontakt osnowa-włókno jest zachowany.
5. Nie wyróżnia się warstwy pośredniej na styku osnowa-włókno.
6. Kompozyt po homogenizacji jest materiałem monotropowym, liniowo lepkosprężystym. Kierunek monotropii pokrywa się z kierunkiem ułożenia włókien.
7. Kompozyt pozostaje w warunkach izotermicznych, w temperaturze pokojowej.

Homogenizację kompozytu przeprowadza się zgodnie z teorią wzmocnienia PKW, sformułowaną w pracach [7, 8] i rozwiniętą w [4]. Kompozyt przed homogenizacją jest traktowany jako zbiór walców włókno-osnowa, „zanurzonych” w heksagonalnych pryzmach. Zgodnie z założeniem Hilla [9] przyjmuje się, że materiał uzupełniający walce do pryzm heksagonalnych ma właściwości kompozytu po homogenizacji.

RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE LEPKOSPŘĘŻYSTOŚCI OSNOWY

Równania konstytutywne opisujące model reologiczny HWKK osnowy, przedstawione w pracy [6], mogą być przekształcone do postaci separowanej (postaciowo-objętościowej)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S(t) = S_S(t) \otimes \boldsymbol{\sigma}_S(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b(t) = S_b(t) \otimes \boldsymbol{\sigma}_b(t) \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_S &= \text{col}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_b, \varepsilon_{yy} - \varepsilon_b, \varepsilon_{zz} - \varepsilon_b, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b &= \text{col}(\varepsilon_b, \varepsilon_b, \varepsilon_b, 0, 0, 0) \\ \boldsymbol{\sigma}_S &= \text{col}(\sigma_{xx} - \sigma_b, \sigma_{yy} - \sigma_b, \sigma_{zz} - \sigma_b, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}) \\ \boldsymbol{\sigma}_b &= \text{col}(\sigma_b, \sigma_b, \sigma_b, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad \sigma_b = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

We wzorach (1) i (2) wprowadzono następujące oznaczenia: xyz - dowolnie przyjęty kartezyjski układ

współrzędnych; $\boldsymbol{\varepsilon}_S, \boldsymbol{\varepsilon}_b$ - dewiator i aksjator tensora odkształcenia (w notacji macierzowej), $\boldsymbol{\sigma}_S, \boldsymbol{\sigma}_b$ - dewiator i aksjator tensora naprężenia (w notacji macierzowej), $S_S(t), S_b(t)$ - postaciowa i objętościowa podatność czasowa (sprężysto-lepkosprężysta) materiału izotropowego. Podatności czasowe wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} S_S(t) &= S_S^0 \left[1 + \omega_{S1} \int_0^t \Phi_1(t-\vartheta) d\vartheta + \omega_{S2} \int_0^t F_2(t-\vartheta) d\vartheta \right] \\ S_b(t) &= S_b^0 \left[1 + \omega_{b1} \int_0^t \Phi_1(t-\vartheta) d\vartheta + \omega_{b2} \int_0^t F_2(t-\vartheta) d\vartheta \right] \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_S^0 &= \frac{1}{2G}, \quad S_b^0 = \frac{1}{3B}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ B &= \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \omega_{S1} = \frac{\omega_{x1} + \nu\omega_{y1}}{1+\nu}, \quad \omega_{S2} = \frac{\omega_{x2} + \nu\omega_{y2}}{1+\nu}, \\ \omega_{b1} &= \frac{\omega_{x1} - 2\nu\omega_{y1}}{1-2\nu}, \quad \omega_{b2} = \frac{\omega_{x2} - 2\nu\omega_{y2}}{1-2\nu} \end{aligned} \quad (4)$$

przy czym:

$$\Phi_1(t) = \gamma\Phi(t) + (1-\gamma)F_1(t), \quad 0 < \gamma < 1$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha\xi t} \xi \Lambda(\xi; \mu) d\xi, \quad \alpha = \frac{1}{\tau_W}, \\ \Lambda(\xi; \mu) &= \frac{\sin \pi\mu}{\pi} \frac{\xi^{\mu-1}}{1 + 2\xi^\mu \cos \pi\mu + \xi^{2\mu}}, \quad 0 < \mu < 1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$F_i(t) = \alpha_i e^{-\alpha_i t}, \quad \alpha_i = \frac{1}{\tau_{Ki}}, \quad i = 1, 2,$$

$$\tau_{K2} \gg \tau_W, \tau_{K1}$$

Symbole występujące we wzorach (3)-(5) mają następujące znaczenie: S_S^0, S_b^0 - postaciowa i objętościowa podatność sprężysta; G, B - moduły sprężystości postaciowej i objętościowej materiału izotropowego, wyrażone przez moduł Younga E i stałą Poissona ν , ω_{x1}, ω_{x2} - współczynniki określające podatność postaciową w czasie nieograniczonym; ω_{b1}, ω_{b2} - współczynniki określające podatność objętościową w czasie nieograniczonym; $\Phi_1(t)$ - funkcja tworząca odpowiadająca pełzaniu krótkotrwałemu (SLC); $\Phi(t), F_1(t)$ - funkcja wykładnicza ułamkowa oraz funkcja wykładnicza zwykła, odpowiadające SLC; $F_2(t)$ - funkcja tworząca (wykładnicza zwykła) odpowiadająca pełzaniu długotrwałemu (LLC); $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{x2}, \omega_{y2}$ - współczynniki określające podatności kierunkowe w czasie nieograniczonym; μ - ułamek definiujący rozkład czasu sprężystego następstwa $\Lambda(\xi; \mu)$; γ - ułamek definiujący kombinację liniową funkcji $\Phi(t)$,

$F_1(t)$; τ_W , τ_{K1} , τ_{K2} - czasy sprężystego następstwa elementów lepkosprężystych modelu HWKK. Wartości parametrów λ , μ są predefiniowane ($\lambda = 0,5$, $\mu = 0,5$).

Po dokonaniu przeliczeń określonych we wzorach (4), z uwzględnieniem wyników identyfikacji podanych w pracy [6], stałe materiałowe badanych żywic przyjmują wartości podane w tabeli 1.

TABELA 1. Stałe materiałowe opisujące model postaciowo-objętościowy HWKK dla badanych żywic
TABLE 1. Material constants describing the HWKK shear-bulk model, for examined resins

Stała materiałowa	Epidian 53	Polimal 109
E , GPa	3,14	4,28
ν	0,418	0,363
ω_{s1}	0,319	0,819
ω_{b1}	0,0990	0,443
τ_W , h	2	1
τ_{K1} , h	30	30
ω_{s2}	1,16	1,27
ω_{b2}	1,45	-0,682
τ_{K2} , h	1900	1600

RÓWNANIA KONSTITUTYWNE LEPKOSPŘĘŻYSTOŚCI KOMPOZYTU PO HOMOGENIZACJI

Zgodnie z wymienionymi założeniami, w wyniku homogenizacji kompozyt jest modelowany jako materiał monotropowy, liniowo lepkosprężysty. Kierunek monotropii (x) pokrywa się z kierunkiem ułożenia włókien, natomiast płaszczyzna izotropii (yz) jest prostopadła do włókien. Równania konstytutywne lepkosprężystości kompozytu po homogenizacji przewiduje się w postaci [5]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{S}(t) \otimes \boldsymbol{\sigma}(t) \quad (6)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{col}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{col}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy})$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$S_{jk}(t) = S_{jk}^0 \left[1 + \omega_{jk/1} \int_0^t \Phi_1(t-\vartheta) d\vartheta + \omega_{jk/2} \int_0^t F_2(t-\vartheta) d\vartheta \right]$$

$$jk = 11, 22, 12, 23, 55$$

$$S_{11}^0 = \frac{1}{E_{xx}}, \quad S_{22}^0 = \frac{1}{E_{yy}}, \quad S_{12}^0 = -\frac{\nu_{yx}}{E_{xx}},$$

$$S_{23}^0 = -\frac{\nu_{zy}}{E_{yy}}, \quad S_{55}^0 = \frac{1}{2G_{xy}}$$

We wzorach (6) i (7) poszczególne symbole mają następującą interpretację: xyz - kartezjański układ współrzędnych, w którym oś x wyznacza kierunek monotropii; $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ - tensor odkształcenia i naprężenia (w zapisie macierzowym); $\mathbf{S}(t)$ - macierz podatności czasowych (podatności sprężysto-lepkosprężystych) materiału monotropowego; $S_{jk}(t)$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$ - pięć niezależnych kierunkowych podatności czasowych materiału monotropowego; S_{jk}^0 , $jk = 11, 22, 12, 23, 55$ - pięć niezależnych kierunkowych podatności sprężystych materiału monotropowego; E_{xx} , E_{yy} , ν_{yx} , ν_{zy} , G_{xy} - pięć niezależnych stałych sprężystych kompozytu po homogenizacji (moduły Younga, stała Poissona, moduł Kirchhoffa).

Nieznane pozostają stałe lepkosprężyste $\omega_{jk/1}$, $\omega_{jk/2}$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$, określające podatności kierunkowe nieograniczone w czasie, opisujące odpowiednio SLC i LLC kompozytu. Algorytm wyznaczenia tych stałych zostanie sformułowany w następnym rozdziale.

Pięć niezależnych stałych sprężystych kompozytu po homogenizacji (E_{xx} , E_{yy} , ν_{yx} , ν_{zy} , G_{xy}) wyznacza się z teorii wzmocnienia kompozytu, bazującej na zadaniach typu Lamé, szczegółowo omówionej w [7]. Stałe te są częściowo nieliniowymi funkcjami stałych sprężystych osnowy izotropowej (E , ν), stałych sprężystych włókna monotropowego (\bar{E}_{xx} , \bar{E}_{yy} , $\bar{\nu}_{yx}$, $\bar{\nu}_{zy}$, \bar{G}_{xy}) oraz zredukowanego objętościowego stopnia wzmocnienia f . Stałe sprężyste kompozytu wyznaczono analitycznie w pracy [4].

Podsumowując, proponowany model reologiczny PKW jest opisany przez 5 stałych sprężystych (E_{xx} , E_{yy} , ν_{yx} , ν_{zy} , G_{xy}) oraz 13 stałych lepkosprężystych ($\omega_{jk/1}$, $\omega_{jk/2}$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$, τ_W , τ_{K1} , τ_{K2}). Czasy sprężystego następstwa τ_W , τ_{K1} , τ_{K2} są równe odpowiednim czasom dla osnowy.

METODA WYZNACZANIA STAŁYCH LEPKOSPŘĘŻYSTYCH KOMPOZYTU

Metoda wyznaczenia stałych lepkosprężystych $\omega_{jk/1}$, $\omega_{jk/2}$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$ jest modyfikacją metody sformułowanej w pracach [4, 5]. Algorytm metody składa się z następujących etapów:

1) analityczne wyznaczenie podatności sprężystych kompozytu, jako funkcji podatności sprężystych

osnowy, postaciowej S_s^0 i objętościowej S_b^0 , tzn. wyznaczenie $S_{jk}^0 (S_s^0, S_b^0)$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$,

- 2) analityczne wyznaczenie podatności zespolonych osnowy, postaciowej $S_s^*(p)$ i objętościowej $S_b^*(p)$, na podstawie odpowiednich podatności czasowych osnowy $S_s(t)$, $S_b(t)$, przy czym p jest częstością kółową procesu harmonicznego,
- 3) analityczne wyznaczenie podatności zespolonych ścisłych kompozytu po homogenizacji metodą analogii sprężystej-lepkosprężystej, zgodnie ze wzorem

$$S_{jk}^*(p) = S_{jk}^0 [S_s^*(p), S_b^*(p)] = S'_{jk}(p) - iS''_{jk}(p) \quad (8)$$

$$jk = 11, 22, 12, 23, 55; \quad i = \sqrt{-1}$$

- 4) analityczne wyznaczenie podatności zespolonych przybliżonych kompozytu po homogenizacji $S_{jk}^*(p)$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$, na podstawie podatności czasowych $S_{jk}(t)$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$, określonych przez wzory (7)₃,
- 5) analityczne wyznaczenie stałych lepkosprężystych $\omega_{jk/1}$, $\omega_{jk/2}$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$, z warunku równości części rzeczywistej $S'_{jk}(p)$, ścisłej i przybliżonej, w dwóch punktach kolokacji,
- 6) ocena dokładności modelowania lepkosprężystego PKW, na podstawie dopasowania wykresu przybliżonego i ścisłego $S'_{jk}(p)$ oraz wykresu przybliżonego i ścisłego $S''_{jk}(p)$ (oddzielnie dla każdej pary indeksów jk).

Etap 1 został w całości omówiony w pracy [4]. W etapie 3 wykonuje się tylko działania na liczbach zespolonych. Etap 6 (kontrolny) będzie zilustrowany w następnym punkcie pracy. Omówienia wymagają etapy 2, 4, i 5.

Transformaty Laplace'a funkcji tworzących $\Phi(t)$, $F_j(t)$, $j = 1, 2$, mają postać [4]:

$$\bar{\Phi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \Phi(t) dt = \frac{1}{1 + (s\tau_w)^\mu} \quad (9)$$

$$\bar{F}_j(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F_j(t) dt = \frac{1}{1 + s\tau_{Kj}} \quad j = 1, 2$$

gdzie s jest zespolonym parametrem transformaty. Jeśli naprężenia w macierzy są zmienne harmonicznie, z częstością p [h^{-1}], tzn.

$$\sigma_s^*(t) = \sigma_s^0 e^{ipt}, \quad \sigma_b^*(t) = \sigma_b^0 e^{ipt} \quad (10)$$

gdzie σ_s^0, σ_b^0 są wektorami amplitud naprężeń, to dla procesu ustalonego ($t \rightarrow \infty$) otrzymamy

$$\varepsilon_s^*(t) = S_s^*(p) \sigma_s^*(t), \quad \varepsilon_b^*(t) = S_b^*(p) \sigma_b^*(t) \quad (11)$$

gdzie $S_s^*(p)$, $S_b^*(p)$ są poszukiwanymi podatnościami zespolonymi osnowy, postaciową i objętościową. Indeks górny * określa wielkości zespolone. Sposób wyznaczenia podatności zespolonych opisano w pracy [4]. Końcowe formuły, odpowiadające modelowi HWKK, mają postać:

$$S_s^*(p) = S_s^0 \left\{ 1 + \omega_{s1} [\gamma \bar{\Phi}(ip) + (1-\gamma) \bar{F}_1(ip)] + \omega_{s2} \bar{F}_2(ip) \right\} = S_s^0 \left[1 + \omega_{s1} \gamma \frac{1}{1 + (ip\tau_w)^\mu} + \omega_{s1}(1-\gamma) \frac{1}{1 + ip\tau_{K1}} + \omega_{s2} \frac{1}{1 + ip\tau_{K2}} \right] = S_s'(p) - iS_s''(p) \quad (12)$$

$$S_b^*(p) = S_b^0 \left\{ 1 + \omega_{b1} [\gamma \bar{\Phi}(ip) + (1-\gamma) \bar{F}_1(ip)] + \omega_{b2} \bar{F}_2(ip) \right\} = S_b^0 \left[1 + \omega_{b1} \gamma \frac{1}{1 + (ip\tau_w)^\mu} + \omega_{b1}(1-\gamma) \frac{1}{1 + ip\tau_{K1}} + \omega_{b2} \frac{1}{1 + ip\tau_{K2}} \right] = S_b'(p) - iS_b''(p)$$

Rozpatrujemy ponownie proces ustalony, w którym naprężenia w kompozycie po homogenizacji są zmienne quasi-statycznie harmonicznie, z częstością p [h^{-1}], tzn.

$$\sigma^*(t) = \sigma^0 e^{ipt} \quad (13)$$

gdzie σ^0 jest wektorem amplitud. Wówczas

$$\varepsilon^*(t) = \mathbf{S}(t) \otimes \sigma^0 e^{ipt} = \mathbf{S}^*(p) \sigma^*(t) \quad (14)$$

gdzie

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22}^* & S_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44}^* & 0 & 0 \\ & & & & S_{55}^* & 0 \\ \text{sym.} & & & & & S_{66}^* \end{bmatrix} \quad (15)$$

jest macierzą podatności zespolonych, przy czym

$$S_{jk}^*(p) = S'_{jk}(p) - iS''_{jk}(p), \quad jk = 11, 22, 12, 23, 55$$

$$S'_{jk}(p) = S_{jk}^0 \left[1 + \omega_{jk/1} f_1'(p) + \omega_{jk/2} f_2'(p) \right] \quad (16)$$

$$S''_{jk}(p) = S_{jk}^0 \left[\omega_{jk/1} f_1''(p) + \omega_{jk/2} f_2''(p) \right]$$

$$f_1'(p) = \gamma \frac{1 + (p\tau_w)^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2}}{1 + 2(p\tau_w)^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2} + (p\tau_w)^{2\mu}} + (1-\gamma) \frac{1}{1 + (p\tau_{K1})^2}$$

$$f_1''(p) = \gamma \frac{(p\tau_w)^\mu \sin \frac{\pi\mu}{2}}{1 + 2(p\tau_w)^\mu \cos \frac{\pi\mu}{2} + (p\tau_w)^{2\mu}} + (1-\gamma) \frac{p\tau_{K1}}{1 + (p\tau_{K1})^2} \quad (17)$$

$$f_2'(p) = \frac{1}{1 + (p\tau_{K2})^2}, \quad f_2''(p) = \frac{p\tau_{K2}}{1 + (p\tau_{K2})^2}$$

Aby wyznaczyć stałe $\omega_{jk/1}$, $\omega_{jk/2}$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$ (oddzielnie dla każdej pary indeksów jk), wystarczy przyrównać część rzeczywistą $S'_{jk}(p)$, ścisłą (etap 3) i przybliżoną (etap 4). Optymalne dopasowanie uzyskuje się, przyjmując punkty zgodności rozwiązań $p = p_1 \approx \alpha_1$, $p = p_2 \approx \alpha_2$, przy czym \approx oznacza tu ten sam rząd wielkości.

Na podstawie wzoru (16)₂ otrzymujemy zbiór pięciu układów algebraicznych równań liniowych, z niewiadomymi $\omega_{jk/1}$, $\omega_{jk/2}$, $jk = 11, 22, 12, 23, 55$:

$$\begin{cases} f_1'(p_1)\omega_{jk/1} + f_2'(p_1)\omega_{jk/2} = \frac{S'_{jk}(p_1)}{S_{jk}^0} - 1 \\ f_1'(p_2)\omega_{jk/1} + f_2'(p_2)\omega_{jk/2} = \frac{S'_{jk}(p_2)}{S_{jk}^0} - 1 \end{cases} \quad (18)$$

przy czym $S'_{jk}(p_1)$, $S'_{jk}(p_2)$ są wartościami ścisłymi, wyznaczonymi w etapie 3.

PRZYKŁAD MODELOWANIA KOMPOZYTU

Osnowa kompozytu jest żywicą epoksydową Epidian 53. Jako wzmocnienie przyjęto włókna polietylenowe VHDPE Tenfor SN1A. Objętościowy stopień wzmocnienia wynosi $f_a = 0,55$, natomiast jego wartość zredukowana (wykorzystana w teorii wzmocnienia) jest równa $f = 0,50$. Wartości stałych materiałowych Epidian-53 zestawiono w tabeli 1. Wartości stałych sprężystych włókna polietylenowego wynoszą: $\bar{E}_{xx} = 60,4$ GPa, $\bar{E}_{yy} = 4,68$ GPa, $\bar{\nu}_{yx} = 0,380$, $\bar{\nu}_{zy} = 0,550$, $\bar{G}_{xy} = 1,65$ GPa.

Na podstawie wzorów (1)-(18) opracowano część programu komputerowego FCVISC v.3, w języku Pascal, służącego do modelowania PKW w zakresie spręży-

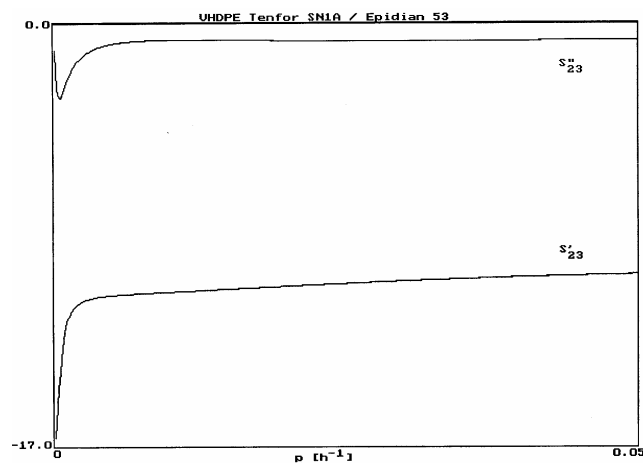
stym i lepkosprężystym. Wyniki liczbowe modelowania sprężystego i lepkosprężystego kompozytu są następujące:

$$E_{xx} = 31,8 \text{ GPa}, \quad E_{yy} = 4,14 \text{ GPa}, \quad \nu_{yx} = 0,399, \\ \nu_{zy} = 0,617, \quad G_{xy} = 1,35 \text{ GPa},$$

$$\omega_{11/1} = 0,012, \quad \omega_{11/2} = 0,027, \quad \omega_{22/1} = 0,154, \\ \omega_{22/2} = 0,624, \quad \omega_{12/1} = 0,029, \quad \omega_{12/2} = -0,006,$$

$$\omega_{23/1} = 0,218, \quad \omega_{23/2} = 0,659, \quad \omega_{55/1} = 0,158, \\ \omega_{55/2} = 0,536.$$

Na rysunku 1 pokazano przykładowy wykres ścisłej i przybliżonej podatności zespolonej $S_{23}^*(p) = S'_{23}(p) - iS''_{23}(p)$, oddzielnie część rzeczywistą i urojoną. Wykresy (ściśły i przybliżony) prawie pokrywają się; różnice przejawiają się w odcinkowych nieznacznych przesunięciach wykresów. Podobnie zachowują się pozostałe podatności zespolone. Świadczy to o pozytywnej weryfikacji proponowanych równań konstytutywnych lepkosprężystości PKW.



Rys. 1. Podatność zespolona $S_{23}^*(p)$ kompozytu VHDPE Tenfor SN1A polyethylene/Epidian 53 epoxy

Fig. 1. The compliance $S_{23}^*(p)$ for the VHDPE Tenfor SN1A polyethylene/Epidian 53 epoxy composite

PODSUMOWANIE

Opracowana metoda przewidywania właściwości lepkosprężystych PKW jest złożoną metodą analityczną, z komputerowym wspomaganie obliczeń. Przedstawiono opis konstytutywny modelu reologicznego PKW, algorytmu wyznaczania stałych materiałowych oraz podano przykład modelowania PKW.

Liczba stałych materiałowych, opisujących proponowany model reologiczny PKW (5 stałych sprężystych, 13 stałych lepkosprężystych), jest relatywnie mała, a jednocześnie umożliwiającą symulację odpowiedzi materiału na dowolny program obciążenia. Wszystkie stałe

są zinterpretowane fizycznie i dobrze wyczuwalne przez projektantów. Opracowany model odnosi się do pojedynczej warstwy laminatu.

LITERATURA

- [1] Wilczyński A.P., The fractional exponential function as a master function for mechanical behaviour of plastics, Proc. 36th ANTEC Conf., 1978, 220-221.
- [2] Wilczyński A.P., Viscoelasticity of fibrous polymeric composites. A theoretical approach (abstract), Proc. 3rd Int. Conf. on Composites Engineering ICCE/3, New Orleans 1996, 927-928.
- [3] Wilczyński A.P., Polimerowe kompozyty włókniste, Metody numeryczne w modelowaniu materiału, Mat. 36 Symp. nt. Modelowanie w mechanice, Wisła 1997, 293-297.
- [4] Wilczyński A.P., Kłasztorny M., Determination of complex compliances of fibrous polymeric composites, J. Composite Materials 2000, 34, 1, 1-27.
- [5] Kłasztorny M., Wilczyński A.P., Constitutive equations of viscoelasticity and estimation of viscoelastic parameters of unidirectional fibrous polymeric composites, J. Composite Materials 2000, 34, 19, 1624-1639.
- [6] Kłasztorny M., Gieleta R., Modelowanie lepkosprężystych żywic jako osnów polimerowych kompozytów włóknistych, VI Sem. Kompozyty - Teoria i Praktyka, Ustroń - Jaszowiec 2002.
- [7] Wilczyński A.P., A basic theory of reinforcement for unidirectional fibrous composites, Composites Science & Technology 1990, 38, 327-337.
- [8] Wilczyński A.P., Lewiński J., Predicting the properties of unidirectional fibrous composites with monotropic reinforcement, Composites Science & Technology 1995, 55, 139-143.
- [9] Hill R., Theory of mechanical properties of fibrestrengthened materials, Self-consistent model, J. Mech. Phys. Solids 1965, 189:13.

Recenzent
Andrzej Bochenek