

Marian Klasztorny¹

Politechnika Warszawska, Instytut Mechaniki i Konstrukcji, ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa

PODATNOŚCIOWE I SZTYWNOŚCIOWE RÓWNANIA KONSTITUTYWNE LEPKOSPĘŻYSTOŚCI ŻYWIC

Opracowano zmodyfikowany model reologiczny HWKK żywic z uwzględnieniem analiz wyników badań eksperymentalnych. Model ten pozwala na symulację procesów lepkospężytych krótko-, średnio- i długotrwałych w żywicy epoksydowej lub poliestrowej, przy założeniu procesów odwracalnych, pierwszego rzędu, występujących w polimerowych kompozytach włóknistych. Sformulowano podatnościowe równania konstytutywne liniowej lepkospężytyści żywic, w wersji postaciowo-objętościowej (3)₁. Zastosowano trzy liniowo niezależne funkcje historii naprężenia (3)_{2,3} do symulacji odkształceń postaciowych. Odkształcenia objętościowe są symulowane jako idealnie sprężyste. Model reologiczny HWKK żywic został pozytywnie zweryfikowany dla wybranych programów naprężenia.

Zmodyfikowany model HWKK jest opisany przez dwie stałe sprężystości oraz 6 stałych lepkospężytyści (3 współczynniki pełzania długotrwałego i 3 czasy retardacji). Opracowano algorytm identyfikacji (4, 5) stałych lepkospężytyści i wyznaczono te stałe dla żywicy epoksydowej Epidian 53 oraz poliestrowej Polimal 109 (tab. 1). Wyniki eksperymentalne oraz optymalnie symulowane pełzanie dla wybranej żywicy pokazano na rysunku 1.

Opracowano analityczną metodę odwracania podatnościowych równań konstytutywnych lepkospężytyści żywic. W przedstawionej metodzie wykorzystuje się przybliżone sztywnościowe równania konstytutywne lepkospężytyści modelu HWKK (9)₁, które symulują przebiegi naprężeń dewiatorycznych za pomocą trzech liniowo niezależnych funkcji historii odkształcenia. W równaniach sztywnościowych występują dwie stałe sprężystości (te same co w równaniach podatnościowych) oraz 6 stałych lepkospężytyści, o przejrzystej interpretacji fizycznej (3 współczynniki relaksacji długotrwałej oraz 3 czasy relaksacji). Naprężenia aksjatoryczne są symulowane jako idealnie sprężyste. Stałe lepkospężytyści występujące w równaniach sztywnościowych wyznacza się analitycznie (21)-(25) z warunku zgodności ścisłej i przybliżonej sztywności zespolonej postaciowej. Rezultaty odwracania podatnościowych równań konstytutywnych pokazano na rysunku 2, przedstawiającym w skali półlogarytmicznej ścisłą i przybliżoną sztywność zespoloną postaciową wybranej żywicy.

Słowa kluczowe: żywice, równania konstytutywne podatnościowe i sztywnościowe, stałe materiałowe, identyfikacja

CONSTITUTIVE COMPLIANCE/STIFFNESS EQUATIONS OF VISCOELASTICITY FOR RESINS

A modified rheological model HWKK for resins has been developed, taking into consideration the results of analysis of the experimental investigations. This model makes possible to simulate short-, medium- and long-lasting viscoelastic processes in epoxy or polyester resin, provided that the processes are reversible and of the first-rank type. These assumptions are satisfied for fibrous polymeric composites. Constitutive compliance equations of linear viscoelasticity have been formulated, in the shear-bulk version (3)₁. The shear (distorsional) deformations are simulated with three linearly independent stress-history functions (3)_{2,3}. The bulk (voluminal) deformations are simulated as ideally elastic. The HWKK rheological model for resins has been positively validated for selected stress programmes.

The modified HWKK model is described with two constants of elasticity and 6 constants of viscoelasticity, i.e. 3 long-lasting creep coefficients and 3 retardation times. An algorithm for identification of constants of viscoelasticity has been developed (4, 5) and these constants have been estimated for Epidian 53 epoxy as well as Polimal 109 polyester resin (Table 1). The experimental results and the optimally simulated creep processes are illustrated in Figure 1 for selected resin.

An analytic method for reversal of the constitutive compliance equations of viscoelasticity has been developed. The method uses the approximate constitutive stiffness equations of viscoelasticity of the HWKK model (9)₁, which simulate time histories of the deviatoric stresses with three linearly independent strain-history functions. In the stiffness equations there occur 2 constants of elasticity (the same as in the compliance equations) as well as 6 constants of viscoelasticity of clear physical interpretation (3 long-lasting relaxation coefficients and 3 relaxation times). The axiatoric stresses are simulated as ideally elastic. The constants of viscoelasticity, describing the stiffness equations, are derived from the condition of coincidence of the exact and approximate shear complex stiffnesses (21)-(25). The results of reversal of the constitutive compliance equations are illustrated in Figure 2, presenting the exact and approximate shear complex stiffnesses for selected resin.

Key words: resins, constitutive compliance/stiffness equations, material constants, identification

WSTĘP

Żywica epoksydowa i poliestrowa należą do powszechnie stosowanych matryc polimerowych kompozytów włóknistych. W praktyce poziomy naprężen w żywicach nie przekraczają wówczas 30% ich wy-

trzymałości doraźnej na rozciąganie. Procesy reologicz-

ne w żywicach, m.in. pełzania i relaksacji, są wówczas odwracalne, pierwszego rzędu, ale, jak pokazują ekspe-

¹ prof. dr hab. inż.

rymenty, nie dają się symulować za pomocą pojedynczej funkcji tworzącej w klasie funkcji wykładniczych.

Modelowaniu żywic w zakresie liniowo lepkosprężystym w wersji podatnościowej poświęcone są m.in. prace [1-8]. Rabortnow [1] zastosował wybraną funkcję wykładniczą ułamkową jako funkcję historii naprężenia normalnego. Tę samą funkcję zastosował Wilczyński [2], wprowadzając całkowite przedstawienie tej funkcji oraz niezależną symulację lepkosprężystych odkształceń postaciowych i objętościowych. Jest to tzw. model HW. Model HW został praktycznie zastosowany w pracy [3], gdzie do modelowania lepkosprężystego żywicy epoksydowej wykorzystano przebiegi pełzania postaciowego i objętościowego tworzywa sztucznego, podane w monografii [4].

Lepsze dopasowanie do wyników eksperymentalnych w zakresie pełzania żywic uzyskano dla modelu HWKN [5], opisującego pełzanie pierwszorzędowe i drugorzędowe żywic. Model mechaniczny HWKN składa się z elementów Hooke'a, Wilczyńskiego, Kelvina i Newtona; jest opisany przez 2 stałe sprężystości oraz 12 stałych lepkosprężystości (2 współczynniki pełzania długotrwałego, 4 ułamki, 6 czasów retardacji). Algorytm identyfikacji stałych lepkosprężystości jest częściowo niejednoznaczny, tzn. można wyznaczyć wiele zestawów wartości stałych przy założonym błędzie aproksymacji.

Eksperymentalna walidacja modelu HWKN dla wybranych programów naprężenia dała wyniki negatywne. Opracowano zatem kolejny model reologiczny HWKK [6], uzyskując dobrą zgodność procesów symulowanych i eksperymentalnych w próbach walidacyjnych, zarówno dla żywicy epoksydowej, jak i poliestrowej. Model HWKK w wersji sformułowanej w [6] jest opisany przez 2 stałe sprężystości oraz 7 stałych lepkosprężystości (4 współczynniki pełzania długotrwałego, 3 czasy retardacji). Model uzależnia od siebie dwa współczynniki pełzania długotrwałego oraz nie wykorzystuje eksperymentalnie stwierdzonego faktu, że odkształcenia objętościowe mają charakter sprężysty [7].

W niniejszej pracy opracowano zmodyfikowany model reologiczny HWKK żywic, z uwzględnieniem dotychczasowych analiz wyników badań eksperymentalnych. Sformułowano podatnościowe równania konstytutywne liniowej lepkosprężystości tego modelu, w wersji postaciowo-objętościowej, opisujące izotermiczne procesy lepkosprężyste krótko-, średnio- i długotrwałe, odwracalne, pierwszego rzędu. Odkształcenia postaciowe są symulowane przez trzy liniowo niezależne funkcje historii naprężenia. Odkształcenia objętościowe są symulowane jako idealnie sprężyste. Odzworowanie mechaniczne tego modelu składa się z elementów Hooke'a, Wilczyńskiego oraz dwóch elementów Kelvina, połączonych szeregowo.

Problem odwracania podatnościowych równań konstytutywnych lepkosprężystości żywic był analizowany

m.in. w pracach [2, 9, 10]. W monografii [2] sformułowano podatnościowe i sztywnościowe równania konstytutywne odpowiadające modelom HK, HW, przy założeniu lepkosprężystych odkształceń postaciowych i objętościowych.

W pracy [9] rozważono modele bardziej złożone, HKN, HKK, HWK, z których ostatni (HWK) jest przydatny do modelowania procesów odwracalnych krótko- i średniotrwałych w żywicach. W przypadku modeli HKN, HKK podatnościowe równania konstytutywne odwrócono analitycznie, wykorzystując tylko transformaty Laplace'a. Odnośnie do modelu HWK wspomniano o możliwości numerycznego odwrócenia równań podatnościowych za pomocą odwrotnej transformacji Laplace'a.

Próbę numerycznego odwrócenia podatnościowego równania konstytutywnego postaciowego, opisującego model HWKN podjęto w pracy [10]. Zaproponowano wyznaczanie stałych lepkosprężystości z warunku dopasowania transformat Laplace'a, odpowiadających równaniu podatnościowemu oraz przyjętemu równaniu sztywnościowemu. Zastosowano metodę systematycznego przeszukiwania, co w przypadku relatywnie dużej liczby zmiennych decyzyjnych (6) i bardzo rozległych przedziałów przeszukiwania prowadzi do algorytmu nieefektywnego numerycznie. Ponadto, transformaty Laplace'a dopasowywano, przyjmując rzeczywiste, a nie zespolone, wartości parametru transformat.

W niniejszej pracy opracowano analityczną metodę odwracania podatnościowych równań konstytutywnych lepkosprężystości żywic, opisujących zmodyfikowany model reologiczny HWKK.

PODATNOŚCIOWE RÓWNANIA KONSTITUTYWNE SPRĘŻYSTOŚCI ŻYVIC

W modelowaniu żywic, jako macryc polimerowych kompozytów włóknistych, powszechnie zakłada się izotropowość oraz liniowość związków konstytutywnych. Podatnościowe równania konstytutywne sprężystości, w sformułowaniu kierunkowym, w notacji macierzowej mają znaną postać (m.in. [5])

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_2 & 0 & 0 & 0 \\ & S_1 & S_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_s & 0 & 0 \\ & & & & S_s & 0 \\ & & & & & S_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \frac{1}{E}, \quad S_2 = -\frac{\nu}{E}, \quad S_s = S_1 - S_2$$

(1)

gdzie: xyz - kartezyjski układ współrzędnych, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - wektor odkształceń kierunkowych, $\boldsymbol{\sigma}$ - wektor naprężeń

kierunkowych, \mathbf{S} - macierz podatności sprężystych, E - moduł Younga, ν - stała Poissona.

Podatnościowe równania konstytutywne sprężystości, w wersji postaciowo-objętościowej, w notacji macierzowej mają formę [5]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = S_s \boldsymbol{\sigma}_s, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = S_b \boldsymbol{\sigma}_b$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}_s = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{I} = \text{diag}(1,1,1,1,1,1), \quad \mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_s = S_1 - S_2 = \frac{1}{2G}, \quad S_b = S_1 + 2S_2 = \frac{1}{3B}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$B = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2)$$

gdzie: $\boldsymbol{\varepsilon}_s, \boldsymbol{\sigma}_s, \boldsymbol{\varepsilon}_b, \boldsymbol{\sigma}_b$ - dewiator odkształceń, dewiator naprężeń, aksjator odkształceń i aksjator naprężeń (w zapisie macierzowym), S_s - podatność sprężysta postaciowa, S_b - podatność sprężysta objętościowa, G - moduł Kirchhoffa, B - moduł Helmholtza, przy czym $\mathbf{S} = S_s(\mathbf{I} - \mathbf{A}) + S_b\mathbf{A}$.

PODATNOŚCIOWE RÓWNANIA KONSTITUTYWNE LEPKOSPŘĘŻYSTOŚCI ŻYWIC W WERSJI POSTACIOWO-OBJĘTOŚCIOWEJ

Analiza wyników badań eksperymentalnych w zakresie odkształceń próbek rozciąganych jednokierunkowo według wybranych programów naprężenia [5-7] prowadzi do wniosku, że podatnościowe równania konstytutywne lepkosprężystości żywic, w wersji postaciowo-objętościowej, można przyjąć w postaci

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(t) = S_s(t) \otimes \boldsymbol{\sigma}_s(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b(t) = S_b \cdot \boldsymbol{\sigma}_b(t)$$

$$S_s(t) = S_s \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_j \int_0^t F_j(t-\vartheta) d\vartheta \right]$$

$$F_0(t) = \alpha_0 \int_0^\infty e^{-\alpha_0 \xi t} \xi \Lambda(\xi) d\xi, \quad \Lambda(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{\xi(1+\xi)}} \quad (3)$$

$$F_1(t) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad F_2(t) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad \alpha_j = \frac{1}{\tau_j}, \quad j = 0, 1, 2$$

We wzorach (3) wprowadzono następujące nazewnictwo: t - zmienna czasowa, \otimes - operator splotu, $S_s(t)$

- podatność czasowa postaciowa, $F_0(t)$ - funkcja wykładnicza ułamkowa Rabotnowa-Wilczyńskiego z ułamkiem $\mu = 0,5$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ - funkcje wykładnicze zwykłe, $\omega_j, j = 0, 1, 2$, - współczynniki pełzania długotrwałego, $\tau_j, j = 0, 1, 2$, - czasy retardacji (różnych rzędów).

Interpretacja wzorów (3) jest następująca: Podatność czasowa postaciowa jest zdefiniowana przez trzy linowo niezależne funkcje historii naprężenia. Funkcja $F_0(t)$ wpływa na odkształcenia krótko-, średnio- i długotrwałe. Funkcja $F_1(t)$ ma wpływ na odkształcenia średnio- i długotrwałe. Ostatnia funkcja $F_2(t)$ ma wpływ tylko na odkształcenia długotrwałe. Dewiator odkształceń jest lepkosprężysty; odpowiada mu model mechaniczny HWKK (układ elementów Hooke'a, Wilczyńskiego, Kelvina, Kelvina, połączonych szeregowo [6]), opisany przez dwie stałe sprężystości (E, ν lub G, B) oraz 6 stałych lepkosprężystości ($\omega_j, \tau_j, j = 0, 1, 2$). Aksjator odkształceń jest sprężysty. Równania (3)₁ opisują procesy lepkosprężyste w żywicach w warunkach izotermicznych (w temperaturze pokojowej), pierwszego rzędu, odwracalne.

Podatnościowe równania konstytutywne lepkosprężystości, opisujące zmodyfikowany model HWKK, można również sformułować w wersji kierunkowej, bez wprowadzania nowych stałych materiałowych.

IDENTYFIKACJA STAŁYCH LEPKOSPŘĘŻYSTOŚCI ŻYWICY EPOKSYDOWEJ I POLIESTROWEJ

Rozpatruje się pełzanie klasyczne próbek walcowych wykonanych z danej żywicy, rozciąganych jednokierunkowo. Program naprężenia ma postać $\sigma_{xx}(t) = \sigma_{xx} \cdot H(t)$, $\sigma_{xx} = 0,3R_m$, gdzie: x - oś próbki, $H(t)$ - funkcja Heaviside'a, R_m - wytrzymałość natychmiastowa na rozciąganie. Równania opisujące pełzanie dla $t > 0$ mają postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(t) = S_s(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = S_b \cdot \boldsymbol{\sigma}_b$$

$$S_s(t) = S_s \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_j \varphi_j(t) \right], \quad \varphi_0(t) = 1 - \int_0^\infty e^{-\alpha_0 \xi t} \Lambda(\xi) d\xi$$

$$\varphi_j(t) = 1 - e^{-\alpha_j t}, \quad j = 1, 2$$

(4)

Z równań macierzowych (4)₁ wynikają następujące zależności między pierwszymi składowymi dewiatorów i aksjatorów naprężeń i odkształceń: $\varepsilon_{1s}(t) = S_s(t) \cdot \sigma_{1s}$, $\varepsilon_{1b} = S_b \cdot \sigma_{1b}$, przy czym:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1s}(t) &= \frac{2}{3}[\varepsilon_{xx}(t) - \varepsilon_{yy}(t)], \quad \sigma_{1s} = \frac{2}{3}\sigma_{xx} \\ \varepsilon_{1b}(t) &= \frac{1}{3}[\varepsilon_{xx}(t) + 2\varepsilon_{yy}(t)], \quad \sigma_{1b} = \frac{1}{3}\sigma_{xx}\end{aligned}\quad (5)$$

Przebiegi odkształceń kierunkowych $\varepsilon_{xx}(t), \varepsilon_{yy}(t)$ mogą być łatwo zmierzone eksperymentalnie. Badania pełzania próbek z żywicy epoksydowej (Epidian 53) i poliestrowej (Polimal 109) przeprowadzono w latach 2000-2001 w Laboratorium Wytrzymałości Materiałów IMMT WM WAT i szczegółowo opisano w [6].

W niniejszej pracy stałe lepkościowości występujące w równaniach (3) wyznaczono w trzech etapach. W etapie 1 wyznacza się stałe ω_0, τ_0 na podstawie pełzania krótkotrwałego, opisanego formułą przybliżoną $\varepsilon_{1s}(t) \approx S_s [1 + \omega_0 \varphi_0(t)] \sigma_{1s}, t \in (0, T_0)$. Punkty kolokacji wybiera się quasi-równomiernie, w skali logarymicznej, w wymienionym przedziale czasu. Z testów wstępnych wynika, że dla żywicy $T_0 = 3$ h. Minimalizuje się błąd względny δ między pełzaniem symulowanym a pełzaniem eksperymentalnym, w punktach kolokacji. Minimalna liczba punktów kolokacji wynosi $n_0 = 2$. W nieliniowym zadaniu optymalizacyjnym przyjęto $n_0 = 15$, estymując stałe ω_0, τ_0 metodą systematycznego przeszukiwania, w pętli iteracyjnej. Iteracja polegała na stopniowym zawężaniu dwóch przedziałów przeszukiwania, z jednoczesnym zwiększaniem dokładności estymacji do wartości $\Delta\omega_0 = 0,01, \Delta\tau_0 = 0,01$ h.

W etapie 2 wyznacza się stałe ω_1, τ_1 na podstawie pełzania krótko- i średniotrwałego, opisanego formułą przybliżoną $\varepsilon_{1s}(t) \approx S_s [1 + \omega_0 \varphi_0(t) + \omega_1 \varphi_1(t)] \sigma_{1s}, t \in (0, T_1)$. Z testów wstępnych wynika, że dla badanych żywicy $T_1 = 50$ h. Przyjęto $n_1 = 22$. Stałe ω_1, τ_1 estymowano analogicznie jak w etapie 1, przy czym $\Delta\omega_1 = 0,01, \Delta\tau_1 = 0,1$ h.

TABELA 1. Wartości stałych materiałowych sprężystości i lepkościowości badanych żywicy (równania podatnościowe)

TABLE 1. Values of material constants of elasticity and viscoelasticity of the examined resins (compliance equations)

Stała materiałowa	Epidian 53	Polimal 109
$E, \text{ GPa}$	3,14	4,28
ν	0,418	0,363
ω_0	0,19	0,52
ω_1	0,16	0,40
ω_2	1,24	1,28
$\tau_0, \text{ h}$	3,13	1,69
$\tau_1, \text{ h}$	55,1	69,8
$\tau_2, \text{ h}$	2480	2590

W etapie 3 wyznacza się stałe ω_2, τ_2 na podstawie pełzania krótko-, średnio- i długotrwałego w przedziale $t \in (0, T_2)$. Z testów wstępnych wynika, że $T_2 = 50$ h. Przyjęto $n_2 = 30$. Stałe ω_2, τ_2 estymowano analogicznie jak w etapach 1 i 2, przy czym $\Delta\omega_2 = 0,01, \Delta\tau_2 = 10$ h.

Wyższa dokładność estymacji stałych lepkościowości w poszczególnych etapach jest nieuzasadniona ze względu na ograniczoną dokładność pomiarów odkształceń. Wyniki identyfikacji stałych sprężystości i lepkościowości badanych żywicy zestawiono w tabeli 1. Błędy względne δ odchylenia symulowanej krzywej pełzania postaciowego od wartości eksperymentalnych wyniosły $< 0,6\%$ dla Epidianu 53 oraz $< 0,8\%$ dla Polimalu 109. Dokładność modelowania lepkościowego żywicy pokazano na rysunku 1 przykładowo dla żywicy epoksydowej. Odkształcenia występujące na rysunku 1 zdefiniowano we wzorach (5).

Rys. 1. Pełzanie klasyczne próbki z Epidianu 53. Symulowane pełzanie postaciowe i objętościowe na tle wartości eksperymentalnych. Naprężenie rozciągające $\sigma_{xx} = 15,6$ MPa

Fig. 1. Classical creep of the sample made of Epidian 53 epoxy. The simulated shear and bulk creep backgrounded with the experimental values. Tensioning stress $\sigma_{xx} = 15,6$ MPa

SZTYWNOŚCIOWE RÓWNANIA KONSTITUTYWNE SPRĘŻYSTOŚCI I LEPKOSPĘŻYSTOŚCI ŻYVIC

Sztywnościowe równania konstytutywne liniowej sprężystości materiału izotropowego, w wersji postaciowo-objętościowej, otrzymuje się łatwo z równań (2)₁:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = C_s \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad \boldsymbol{\sigma}_b = C_b \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (6)$$

gdzie: $C_s = 2G, C_b = 3B$ są odpowiednio sztywnością sprężystą postaciową i objętościową. Sumując równania (6), z uwzględnieniem zależności (2), otrzymuje się sztywnościowe równania konstytutywne sprężystości, w wersji kierunkowej:

$$\sigma = C \varepsilon$$

$$C = C_s(\mathbf{I} - \mathbf{A}) + C_b \mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_s & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_s & 0 \\ & & & & & C_s \end{bmatrix} \quad (7)$$

przy czym kierunkowe sztywności sprężyste wyrażają się wzorami:

$$C_1 = \frac{1}{3}(3B + 4G), \quad C_2 = \frac{1}{3}(3B - 2G) \quad (8)$$

Przybliżone sztywnościowe równania konstytutywne liniowej lepkosprężystości żywic, w wersji postaciowo-objętościowej, opisujące zmodyfikowany model HWKK, przewiduje się w postaci:

$$\sigma_s(t) = C_s(t) \otimes \varepsilon_s(t), \quad \sigma_b(t) = C_b \cdot \varepsilon_b(t)$$

$$C_s(t) = C_s \left[1 - \sum_{j=0}^2 \kappa_j \int_0^t K_j(t - \vartheta) d\vartheta \right], \quad \beta_j = \frac{1}{\tau_{rj}}$$

$$j = 0, 1, 2, \quad K_0(t) = \beta_0 \int_0^\infty e^{-\beta_0 \xi t} \xi \Lambda(\xi) d\xi, \quad K_1(t) = \beta_1 e^{-\beta_1 t}$$

$$K_2(t) = \beta_2 e^{-\beta_2 t} \quad (9)$$

We wzorach (9) wprowadzono następujące oznaczenia: $C_s(t)$ - sztywność czasowa postaciowa, $K_0(t)$ - funkcja wykładnicza ułamkowa Rabortnowa-Wilczyńskiego z ułamkiem $\mu = 0,5$; $K_1(t)$, $K_2(t)$ - funkcje wykładnicze zwykłe, $\kappa_j, j = 0, 1, 2$, - współczynniki relaksacji długotrwałej, $\tau_{rj}, j = 0, 1, 2$, - czasy relaksacji (różnych rzędów).

Interpretacja wzorów (9) jest następująca: Sztywność czasowa postaciowa jest zdefiniowana przez trzy linowo niezależne funkcje historii odkształcenia. Funkcja $K_0(t)$ ma wpływ na naprężenia dewiatoryczne krótko-, średnio- i długotrwałe. Funkcja $K_1(t)$ ma wpływ na naprężenia średnio- i długotrwałe. Ostatnia funkcja $K_2(t)$ ma wpływ tylko na naprężenia długotrwałe. Dewiator tensora naprężeń jest lepkosprężysty, natomiast aksjator - sprężysty. Sztywnościowe równania konstytutywne są opisane przez dwie stałe sprężystości (G, B) oraz 6 stałych lepkosprężystości ($\kappa_j, \tau_{rj}, j = 0, 1, 2$).

Przybliżone sztywnościowe równania konstytutywne lepkosprężystości żywic można również sformułować w wersji kierunkowej, bez wprowadzania dodatkowych stałych materiałowych.

WYZNACZENIE ŚCISLEJ I PRZYBLIŻONEJ SZTYWNOŚCI ZESPOLONEJ POSTACIOWEJ

W celu uzyskania przejrzystych rozważań w niniejszym punkcie pomijamy indeks ()_s. Do wyznaczenia ścisłej podatności zespolonej postaciowej oraz przybliżonej sztywności zespolonej postaciowej zastosowano metodykę zbliżoną do metodyki opisanej w monografii [2].

Pojedyncze równanie w równaniu macierzowym (3)₁ przepisujemy w postaci

$$\varepsilon(t) = S(t) \otimes \sigma(t), \quad S(t) = \frac{1}{2G} \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_j \int_0^t F_j(t - \vartheta) d\vartheta \right] \quad (10)$$

Transformacja Laplace'a na równaniu (10)₁ daje w wyniku równanie algebraiczne

$$\bar{\varepsilon}(q) = \bar{S}(q) \cdot \bar{\sigma}(q), \quad \bar{S}(q) = \frac{1}{2G} \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_j \bar{F}_j(q) \right] \quad (11)$$

gdzie q jest zespolonym parametrem transformaty, natomiast:

$$\bar{F}_0(q) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{q}{\alpha_0}}}, \quad \bar{F}_1(q) = \frac{1}{1 + \frac{q}{\alpha_1}}, \quad \bar{F}_2(q) = \frac{1}{1 + \frac{q}{\alpha_2}} \quad (12)$$

są transformatami Laplace'a funkcji historii naprężenia. Przechodząc w równaniu (11)₁ do ustalonych procesów harmonicznym z częstością p [h⁻¹], tzn. przyjmując $\varepsilon(t) = \varepsilon e^{ipt}, \sigma(t) = \sigma e^{ipt}, i = \sqrt{-1}, t \rightarrow \infty$, mamy:

$$\varepsilon(t) = S^*(p) \cdot \sigma(t), \quad S^*(p) = \frac{1}{2G} \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_j \bar{F}_j(ip) \right] \quad (13)$$

przy czym [2]:

$$\bar{F}_j(ip) = \bar{F}_j'(p) + i \bar{F}_j''(p)$$

$$\bar{F}_0'(p) = \frac{1 + \sqrt{\frac{p}{2\alpha_0}}}{1 + \sqrt{\frac{2p}{\alpha_0} + \frac{p}{\alpha_0}}}, \quad \bar{F}_0''(p) = -\frac{\sqrt{\frac{p}{2\alpha_0}}}{1 + \sqrt{\frac{2p}{\alpha_0} + \frac{p}{\alpha_0}}} \quad (14)$$

Składowe $\bar{F}_j'(p), \bar{F}_j''(p), j = 1, 2$, odpowiadające zwykłym funkcjom wykładniczym, można znaleźć w [2]. Po podstawieniu wzorów (14) do wzoru (13)₂ otrzymuje się formułę końcową na ścisłą podatność zespoloną postaciową:

$$S^*(p) = S'(p) + iS''(p), \quad S'(p) = \frac{1}{2G} \left[1 + \sum_{j=0}^2 \omega_j \bar{F}_j'(p) \right]$$

$$S''(p) = \frac{1}{2G} \sum_{j=0}^2 \omega_j \bar{F}_j''(p)$$
(15)

Odwroćenie równania (13)₁ prowadzi do związku $\sigma(t) = C^*(p) \cdot \varepsilon(t)$, w którym $C^*(p)$ jest ścisłą sztywnością zespoloną postaciową, określoną przez wzory

$$C^*(p) = \frac{1}{S^*(p)} = C'(p) + iC''(p), \quad C'(p) = \frac{S'(p)}{[S'(p)]^2 + [S''(p)]^2}$$

$$C''(p) = -\frac{S''(p)}{[S'(p)]^2 + [S''(p)]^2}$$
(16)

Pojedyncze równanie w równaniu macierzowym (9)₁ przepisujemy w postaci

$$\sigma(t) = C(t) \otimes \varepsilon(t), \quad C(t) = 2G \left[1 - \sum_{j=0}^2 \kappa_j \int_0^t K_j(t-\vartheta) d\vartheta \right]$$
(17)

Transformacja Laplace'a na równaniu (17)₁ daje w wyniku równanie algebraiczne

$$\bar{\sigma}(q) = \bar{C}(q) \cdot \bar{\varepsilon}(q), \quad \bar{C}(q) = 2G \left[1 - \sum_{j=0}^2 \kappa_j \bar{K}_j(q) \right]$$
(18)

gdzie transformaty Laplace'a $\bar{K}_j(q)$ wyrażają się wzorami analogicznymi jak dla $\bar{F}_j(q)$, $j = 0, 1, 2$, przy czym zamiast α_j należy podstawić β_j , $j = 0, 1, 2$. Przechodząc w równaniu (17)₁ do ustalonych procesów harmoniczych, otrzymuje się:

$$\sigma(t) = C^*(p) \cdot \varepsilon(t), \quad C^*(p) = 2G \left[1 - \sum_{j=0}^2 \kappa_j \bar{K}_j(ip) \right]$$
(19)

$$\bar{K}_j(ip) = \bar{K}_j'(p) + i\bar{K}_j''(p)$$

Części rzeczywiste i urojone $\bar{K}_j'(p)$, $\bar{K}_j''(p)$ wyrażają się wzorami analogicznymi jak dla $\bar{F}_j'(p)$, $\bar{F}_j''(p)$, $j = 0, 1, 2$, przy czym zamiast α_j należy podstawić β_j , $j = 0, 1, 2$. Końcowe wzory na przybliżoną sztywność zespoloną postaciową przyjmują formę:

$$C^*(p) = C'(p) + iC''(p), \quad C'(p) = 2G \left[1 - \sum_{j=0}^2 \kappa_j \bar{K}_j'(p) \right],$$

$$C''(p) = -2G \sum_{j=0}^2 \kappa_j \bar{K}_j''(p)$$
(20)

WYZNACZENIE STAŁYCH MATERIAŁOWYCH

$\kappa_j, \tau_{rj}, j = 0, 1, 2$

Dla $p > \alpha_0$ (procesy krótkotrwałe) wpływ funkcji tworzących o numerach $j = 1, 2$ jest pomijalny; otrzymujemy wówczas zredukowany model HW, któremu odpowiadają następujące formuły ścisłe na części rzeczywiste podatności i sztywności zespolonej [2]

$$S'(p) = \frac{1}{2G} \left[1 + \omega_0 \bar{F}_0'(p) \right], \quad C'(p) = 2G \left[1 - \kappa_0 \bar{K}_0'(p) \right]$$
(21)

przy czym dla funkcji wykładniczej Rabotnowa-Wilczyńskiego z ułamkiem $\mu = 0,5$ mamy

$$\kappa_0 = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0}, \quad \beta_0 = (1 + \omega_0)^2 \alpha_0$$
(22)

Dla $p = \alpha_1$ (procesy krótko- i średniotrwałe) tylko wpływ funkcji tworzącej o numerze $j = 2$ jest pomijalny; otrzymujemy zredukowany model HWK. We wzorach (15)₂ należy pominąć składniki odpowiadające $j = 2$, natomiast wzory (20) redukują się do postaci

$$C'(\alpha_1) = 2G \left[1 - \kappa_0 \bar{K}_0'(\alpha_1) - \kappa_1 \bar{K}_1'(\alpha_1) \right]$$

$$C''(\alpha_1) = -2G \left[\kappa_0 \bar{K}_0''(\alpha_1) + \kappa_1 \bar{K}_1''(\alpha_1) \right]$$
(23)

Jeśli po lewej stronie formuł (23) wstawimy wartości ścisłe, określone wzorami (16), to otrzymamy układ dwóch równań algebraicznych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązanie ma postać:

$$\kappa_1 = A_1 + \frac{B_1^2}{A_1}, \quad \beta_1 = \frac{A_1}{B_1} \alpha_1, \quad A_1 = 1 - \kappa_0 \bar{K}_0'(\alpha_1) - \frac{C'(\alpha_1)}{2G}$$

$$B_1 = \kappa_0 \bar{K}_0''(\alpha_1) + \frac{C''(\alpha_1)}{2G}$$
(24)

Dla $p = \alpha_2$ (procesy krótko-, średnio- i długotrwałe) uwzględniamy pełny model HWKK. Z warunku równości części rzeczywistych ścisłej i przybliżonej sztywności zespolonej oraz równości odpowiednich części urojonych otrzymuje się układ równań algebraicznych, którego rozwiązanie ma postać:

$$\kappa_2 = A_2 + \frac{B_2^2}{A_2}, \quad \beta_2 = \frac{A_2}{B_2} \alpha_2$$

$$A_2 = 1 - \kappa_0 \bar{K}_0'(\alpha_2) - \kappa_1 \bar{K}_1'(\alpha_2) - \frac{C'(\alpha_2)}{2G} \quad (25)$$

$$B_2 = \kappa_0 \bar{K}_0''(\alpha_2) + \kappa_1 \bar{K}_1''(\alpha_2) + \frac{C''(\alpha_2)}{2G}$$

Powyższą procedurę powtarzamy w pętli iteracyjnej, uwzględniając pełny model HWKK również przy wyznaczaniu parametrów κ_1 , β_1 . W k -tej iteracji należy przyjąć wartości κ_2 , β_2 z iteracji ($k-1$).

Miarą dopasowania są względne odchylenia przybliżonej sztywności zespolonej postaciowej (20) od sztywności ścisłej (16), obliczane klasycznie, oddzielnie dla części rzeczywistych (δ') i urojonych (δ''). Przedział zmienności częstości p obejmuje α_1 , α_2 , α_3 , które dla analizowanego modelu są różnych rzędów.

Wyniki obliczeń dla żywicy epoksydowej (Epidian 53) i poliestrowej (Polimal 109) zestawiono w tabeli 2. Czas obliczeń na PC nie przekraczał 1 s dla danej żywicy. Proces iteracyjny jest zbieżny; wartości stałych lepkosprężystości ustalają się po 6-7 iteracjach, z dokładnością do 5 cyfr znaczących. Wartości stałych materiałowych: $E, \nu, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \tau_0, \tau_1, \tau_2$, stanowiące zbiór danych wejściowych, podano w tabeli 2.

TABELA 2. Wartości stałych materiałowych sprężystości i lepkosprężystości badanych żywic (równania sztywnościowe)

TABLE 2. Values of material constants of elasticity and viscoelasticity of the examined resins (stiffness equations)

stała materiałowa	Epidian 53	Polimal 109
G , GPa	1,11	1,57
B , GPa	6,40	5,21
κ_0	0,160	0,342
κ_1	0,106	0,145
κ_2	0,350	0,202
τ_{r0} , h	2,21	0,731
τ_{r1} , h	44,7	48,3
τ_{r2} , h	1280	1530

Rys. 2. Ścisła i przybliżona sztywność zespolona postaciowa żywicy epoksydowej Epidian 53

Fig. 2. The exact and approximate shear complex stiffnesses for Epidian 53 epoxy

Dopasowanie sztywności zespolonych pokazano na rysunku 2, przykładowo dla żywicy epoksydowej, w skali półlogarytmicznej. Odchylenia wynoszą: $\delta' = 0,06\%$, $\delta'' = 0,53\%$ dla Epidianu 53 oraz $\delta' = 0,16\%$, $\delta'' = 1,03\%$ dla Polimalu 109.

WNIOSKI

Zmodyfikowany model HWKK pozwala na symulację izotermicznych procesów lepkosprężystych krótko-, średnio- i długotrwałych w żywicach, jako macierzach polimerowych kompozytów włóknistych. Model ten jest opisany przez relatywnie małą liczbę stałych materiałowych. Identyfikacja stałych lepkosprężystych jest jednoznaczna. Metoda odwracania podatnościowych równań konstytutywnych modelu HWKK jest analityczna, jednoznaczna i o wysokiej dokładności.

LITERATURA

- [1] Rabotnow J.N., Elements of viscoelastic mechanics of solids (in Russian), Nauka Press, Moscow 1977.
- [2] Wilczyński A.P., Mechanika polimerów w praktyce konstrukcyjnej, WNT, Warszawa 1984.
- [3] Wilczyński A.P., Kłasztorny M., Determination of complex compliances of fibrous polymeric composites, J. Composite Materials 2000, 34, 1, 2-26.
- [4] Wilczyński A.P., Wybrane problemy badania własności mechanicznych liniowo sprężystych ciał stałych, OWPW, Warszawa 1968.
- [5] Kłasztorny M., Wilczyński A.P., Witemberg-Perzyk D., A rheological model of polymeric materials and identification of its parameters, J. Theoretical & Applied Mechanics 2001, 39, 1, 13-32.
- [6] Kłasztorny M., Gieleta R., The HWKK rheological model for resins, J. Theoretical & Applied Mechanics 2002, 40, 4, 939-960.
- [7] Kłasztorny M., Wilczyński A.P., Constitutive modeling of polymeric resins based on shear and bulk creep, 2nd European Conf. on Computational Mechanics ECCM-2001, Cracow 2001, CD Conf. Proceed., Paper No 111, 1-14.
- [8] Kłasztorny M., Wilczyński A.P., Viscoelastic modelling of fibre-reinforced resin matrix composites, 1st Int. Conf. on High Performance Structures & Composites, Seville 2002, 231-242.
- [9] Wilczyński A.P., Tworzenie i stosowanie związków konstytutywnych lepkosprężystych kompozytów polimerowych, Mat. 3. Szkoły Kompozytów nt. Modelowanie i analiza ma-

teriałów i elementów kompozytowych, Wisła 2001, 249-259.

- [10] Kaniewski J., O możliwościach odwracania pewnych zależności konstytutywnych materiałów lepkosprężystych, Raport badawczy nr IMiK/ZM/3/2001, Instytut Mechaniki i Konstrukcji PW, Warszawa 2001.

Recenzent
Stanisław Mazurkiewicz