

Marcin Kamiński¹

Politechnika Łódzka, Katedra Mechaniki Materiałów, al. Politechniki 6, 93-590 Łódź

ZAGADNIENIA WRAŻLIWOŚCI WŁASNOŚCI EFEKTYWNYCH MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH

Teoretyczne i numeryczne aspekty wrażliwości własności efektywnych materiałów kompozytowych o składnikach liniowo-sprężystych i poprzecznie izotropowych są tematem niniejszej pracy. Zostały one przedyskutowane i zilustrowane przykładami inżynierskimi dotyczącymi kompozytów periodycznych i dwuskładnikowych o osiowo rozłożonych niejednorodnościach oraz struktur włóknistych, jednakże model ogólny został sformułowany dla kompozytów o dowolnej liczbie składników. Obliczenia numeryczne zostały wykonane za pomocą systemu komputerowego MAPLE do rachunku symbolicznego, a także wykorzystując specjalnie zmodyfikowany program Metody Elementów Skończonych MCCEFF. W celu zweryfikowania wrażliwości różnych kompozytów na ogólny stan odkształcenia/naprężenia wprowadzono funkcjonal wrażliwości oparty na energii odkształcenia w jednostkowym stanie równomiernego osiowego i postaciowego odkształcenia komórki periodyczności. Dalsze analizy numeryczne w tym zakresie pozwolą na analizę wrażliwości innych materiałów kompozytowych, optymalizację różnych kompozytów, rozwiązywanie zagadnień identyfikacji w kompozytach, jak również analizę wrażliwości na kształt struktur ujednorodnionych oraz modelowanie wrażliwości materiałów kompozytowych o własnościach losowych.

Słowa kluczowe: metoda homogenizacji, parametryczna analiza wrażliwości, Metoda Elementów Skończonych, periodyczne materiały kompozytowe, obliczenia symboliczne

SENSITIVITY PROBLEMS OF THE EFFECTIVE PROPERTIES FOR COMPOSITE MATERIALS

The main aim is to present theoretical aspects and the Finite Element Method implementation of sensitivity analysis in homogenization of composite materials with linear elastic components using the effective modules theory. Sensitivity analysis of effective material properties is presented in a general form for n-component periodic composite and is illustrated by the examples of periodic 1D as well as 2D heterogeneous structures; sensitivity coefficients are determined for the effective elasticity tensor components. The structural response functional for the fiber-reinforced elastic composite is proposed in a form of total strain energy resulting from some uniform strain state imposed on the composite Representative Volume Element (RVE). Numerical results confirm the usefulness of the homogenization method in computational analysis of composite materials sensitivity and may be applied in composite optimization, identification, shape sensitivity studies as well as in stochastic sensitivity analysis of random composites.

Key words: homogenization method, design sensitivity analysis, Finite Element Method, elastic periodic composites, symbolic computations

WSTĘP

Artykuł jest poświęcony analizie wrażliwości własności efektywnych [4, 6] wybranych liniowo-sprężystych materiałów kompozytowych w odniesieniu do własności materiałowych składników kompozytów. W tym celu najpierw rozwiązuje się symbolicznie [2, 5] lub za pomocą odpowiedniej procedury Metody Elementów Skończonych (MES) problem homogenizacji [1, 7, 9, 10], a następnie oblicza się pochodne cząstkowe (gradienty wrażliwości [3, 6, 8]), również przy zastosowaniu podejścia różnicowego. Należy zwrócić uwagę na fakt, iż homogenizacja kompozytu jest jedynie narzędziem pośrednim w analizie kompozytów - korzystając z jej wyników wykonuje się modelowanie komputerowe materiałów wieloskładnikowych jako struktur jednorodnych o równoważnych własnościach materiałowych. Zatem odpowiednia kombinacja algebra-

iczna gradientów wrażliwości poszczególnych własności

efektywnych musi ilustrować funkcjonal wrażliwości [3, 8] kompozytu w ogólnym stanie naprężenia/ odkształcenia. Jego odpowiednia forma została zaproponowana w pracy jako energia odkształcenia kompozytu poddanego równomiernym jednostkowym odkształceniom osiowym oraz postaciowym. Taki funkcjonal może więc ilustrować dowolny stan odkształcenia kompozytu poprzez wprowadzenie odpowiednich mnożników dla odkształceń w różnych kierunkach. Numeryczna analiza wrażliwości wprowadza możliwość weryfikacji różnorodnych teorii i modeli homogenizacji, jeśli np. kompozyt zhomogenizowany wykazuje taką samą wrażliwość jak struktura rzeczywista, wówczas rozpatrywany model własności efektywnych jest prawidłowy dla rozpatrywanego zagadnienia inżynierskiego.

¹ dr inż.

Gradyenty wrażliwości są wyznaczone poniżej za pomocą dwóch alternatywnych technik numerycznych: programu do obliczeń symbolicznych MAPLE (kompozyt jednowymiarowy, wzory algebraiczne na własności efektywne), a także systemu MCCEFF (odpowiednia modyfikacja standardowej procedury MES), zastosowanego do rozwiązania zagadnienia homogenizacji. Ta druga metoda pozwala na obliczenie gradientów wrażliwości jedynie z zastosowaniem Metody Różnic Skończonych w przypadku wartości składowych efektywnego tensora sprężystości, obliczonych dla różnych wielkości przyrostu odpowiednich parametrów materiałowych. W celu uniknięcia błędów numerycznych i nieścisłości fizycznych wynikających z tej techniki oraz uzyskania liczbowych wartości odpowiednich pochodnych wyniki otrzymane dla różnych przyrostów zostały uśrednione w przedziale od 1 do 10% przyrostu modułów Younga i współczynników Poissona materiałów składowych kompozytu. Obydwie ilustracje numeryczne dowodzą, że efektywne tensory sprężystości różnych kompozytów inżynierskich wykazują różną wrażliwość na parametry projektowe materiałów składowych, wśród których dominują współczynnik Poissona matrycy i moduł Younga zbrojenia.

MODEL KOMPOZYTU I JEGO WŁASNOŚCI EFEKTYWNE

Rozważmy strukturę kompozytową w płaskim stanie odkształcenia bez naprężeń i odkształceń wstępnych, periodyczną w płaszczyźnie $Y \subset \mathbb{R}^2$ prostopadłej do osi x_3 . Niech komórka periodyczności Ω struktury Y ma kształt prostokątny i zawiera n jednorodnych idealnie połączonych ze sobą materiałów ($n \in \mathbb{N}$, $n < \infty$). Niech każdy składnik kompozytu będzie materiałem liniowo-sprężystym i poprzecznie izotropowym zdefiniowanym przez odpowiedni moduł Younga i współczynnik Poissona jako

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \gamma_a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_a, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \gamma_a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_a \quad (1)$$

dla $a = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Omega$

gdzie γ_a oznacza funkcję charakterystyczną dla składnika z indeksem a

$$\gamma_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_a \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega / \Omega_a \end{cases} \quad \text{dla } a = 1, 2, \dots, n; \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2)$$

natomiast składowe tensora sprężystości $C_{ijkl}(\mathbf{x})$ definiuje się jako

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) \left\{ \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{(1 + \mathbf{v}(\mathbf{x}))(1 - 2\mathbf{v}(\mathbf{x}))} + \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \frac{1}{2(1 + \mathbf{v}(\mathbf{x}))} \right\} \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (3)$$

Efektywny (zhomogenizowany) tensor sprężystości $C_{ijkl}^{(eff)}$ jest wyznaczany z następującego układu różniczkowych równań równowagi:

$$-\operatorname{div}(\mathbf{C}^\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\delta)) = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}^\delta) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j}^\delta + \mathbf{u}_{j,i}^\delta), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5)$$

$$\mathbf{C}^\delta = \gamma^{\delta(a)}(\mathbf{x}_i) \mathbf{C}^{\delta(a)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

rozwiązywanych wraz z odpowiednimi warunkami symetrii pola przemieszczeń na zewnętrznych brzegach komórki periodyczności. Pole przemieszczeń \mathbf{u}^δ jest otrzymywane metodami wariacyjnymi, a następnie stosowane jest przejście graniczne przy $\delta \rightarrow 0$ dla \mathbf{u}^0 , gdzie δ , będąca parametrem skali w kompozytach, jest stosunkiem wymiarów geometrycznych kompozytu w skali mikro do odpowiednich jego wymiarów w makroskali. Pole przemieszczeń \mathbf{u}^0 jest rozwiązaniem analogicznego układu równań, gdzie tensor \mathbf{C}^δ jest zastąpiony przez tensor efektywny definiowany jako

$$C_{ijpq}^{(eff)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (C_{ijpq} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\chi^{(pq)})) d\Omega = \langle C_{ijpq} \rangle_{\Omega} + \langle C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\chi^{(pq)}) \rangle_{\Omega} \quad (7)$$

Odpowiednie składowe tego tensora są stałe w obrębie komórki periodyczności kompozytu. Należy zauważyć, że wybrane materiały kompozytowe z odpowiednim rozkładem przestrzennym składników nie wymagają numerycznego wyznaczania funkcji homogenizacji $\chi^{(pq)}$. Jako przykład rozważmy kompozyt z jednowymiarowym rozkładem niejednorodności wzdłuż osi x_3 . Następujący układ równań musi zostać rozwiązany w celu wyznaczenia parametrów efektywnych:

$$\left(C_{ijkl} \left(\frac{x_3}{\delta} \right) \mathbf{u}_{k,l}^\delta \right), \quad j = f_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}^\delta(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (8)$$

Zgodnie z ogólną teorią [1, 5, 7, 9, 10], otrzymujemy

$$\left(C_{ijkl}^{(eff)} \mathbf{u}_{k,l} \right), \quad j = f_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (9)$$

gdzie tensor efektywny oblicza się również ze wzoru (7). Okresowe funkcje homogenizacji $\chi^{(kl)}(y)$ wyznacza się jako

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y_3) \frac{\partial}{\partial y_1} (\chi_k^{mn}) + C_{ijmn}(y_3) \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (10)$$

Ze względu na wyróżniony kierunek struktury x_3 w kompozycie mamy $\chi^{mn}(y) = \chi^{mn}(y_3)$, a wówczas

$$\frac{\partial}{\partial y_3} \left(C_{i3k3}(y_3) \frac{\partial}{\partial y_3} (\chi_k^{mn}) + C_{i3mn}(y_3) \right) = 0 \quad (11)$$

a przez całkowanie otrzymujemy

$$C_{i3k3}(y_3) \chi_{k,3}^{mn} + C_{i3mn}(y_3) = A_i \quad (12)$$

Jeśli składowe C_{i3k3} tensora sprężystości są odwracalne, to

$$\chi_{k,3}^{mn} = -\{C_{k3j3}\}^{-1} C_{j3mn} + \{C_{k3j3}\}^{-1} A_j \quad (13)$$

Okresowość funkcji homogenizacji powoduje, że $\langle \chi_{,3}^{mn} \rangle_{\Omega} = 0$, a więc

$$0 = -\langle \{C_{k3j3}\}^{-1} C_{j3mn} \rangle_{\Omega} + \langle \{C_{k3j3}\}^{-1} \rangle_{\Omega} A_j \quad (14)$$

Ostatecznie

$$A_i = \langle \{C_{i3k3}\}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle \{C_{k3j3}\}^{-1} C_{j3mn} \rangle_{\Omega} \quad (15)$$

zachodzi więc

$$\begin{aligned} \chi_{k,3}^{mn} = & -\{C_{k3j3}\}^{-1} C_{j3mn} + \\ & + \{C_{k3j3}\}^{-1} \langle \{C_{j3q3}\}^{-1} \rangle_{\Omega}^{-1} \langle \{C_{q3p3}\}^{-1} C_{p3mn} \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (16)$$

Zmodyfikowany wzór na efektywny tensor sprężystości dla struktury jednowymiarowej przybiera postać [5]

$$C_{ijkl}^{(eff)} = \langle C_{ijkl} + C_{ijm3} \chi_{m,3}^{kl} \rangle_{\Omega} \quad (17)$$

ZAGADNIENIE WRAŻLIWOŚCI TENSORA WŁASNOŚCI EFEKTYWNYCH

Współczynniki (gradienty) wrażliwości efektywnego tensora sprężystości w odniesieniu do wektora parametrów projektowych oznaczonego przez \mathbf{h} można zdefiniować jako [6]

$$\begin{aligned} \frac{dC_{ijpq}^{(eff)}}{d\mathbf{h}} = & \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{\partial C_{ijpq}}{\partial \mathbf{h}} d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial \mathbf{h}} \varepsilon_{kl}(\chi_{(pq)}) d\Omega + \\ & + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\chi_{(pq)})}{\partial \mathbf{h}} d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

W celu zapewnienia możliwości porównania ze sobą pochodnych cząstkowych obliczonych względem różnych parametrów fizycznych dokonuje się następującej ich normalizacji:

$$\left(\frac{dC_{ijpq}^{(eff)}}{d\mathbf{h}} \right)_{\text{scaled}} = \frac{\partial C_{ijpq}^{(eff)}}{\partial \mathbf{h}} \cdot \frac{\mathbf{h}}{C_{ijpq}^{(eff)}(\mathbf{h})} \quad (19)$$

(bez sumowania po i, j, p, q)

co umożliwia określenie najważniejszych parametrów projektowych danego typu kompozytu.

Najważniejszym problemem jest jednak wyznaczenie parametrów projektowych najistotniejszych dla zachowania kompozytu w ogólnym stanie naprężenia/odkształcenia przy użyciu metody homogenizacji oraz zaproponowanej metody analizy wrażliwości. W tym celu wprowadza się funkcjonal wrażliwości zawierający energię odkształcenia kompozytu dla komórki periodyczności w jednostkowym stanie odkształcenia względem wzajemnie prostopadłych osi i jednocześnie analogicznego odkształcenia postaciowego. Dalsze wprowadzenie mnożników dla każdego z odkształceń jednostkowych umożliwi numeryczne modelowanie częściej spotykanych praktycznych stanów odkształceń komórki periodyczności (rozciąganie jedno-, dwu- i trójosiowe, a także ścinanie czy skręcanie lub ich kombinacje). W ogólnym przypadku dzięki wprowadzeniu efektywnego tensora sprężystości mamy

$$\begin{aligned} G = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \\ & + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\{C_{1111}^{(eff)}\} \varepsilon_{11} + C_{1122}^{(eff)} \varepsilon_{22} \right) \varepsilon_{11} + \\ & + \left\{ C_{1212}^{(eff)} \varepsilon_{12} + C_{1221}^{(eff)} \varepsilon_{21} \right\} \varepsilon_{12} d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\{C_{2121}^{(eff)}\} \varepsilon_{21} + C_{2112}^{(eff)} \varepsilon_{12} \right) \varepsilon_{21} + \\ & + \left\{ C_{2211}^{(eff)} \varepsilon_{11} + C_{2222}^{(eff)} \varepsilon_{22} \right\} \varepsilon_{22} d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

Pochodne cząstkowe G w odniesieniu do dowolnej składowej wektora \mathbf{h} można wyznaczyć jako

$$\begin{aligned} G^{,h} = & \frac{\partial G}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{h}} \left\{ C_{1111}^{(eff)} + C_{1122}^{(eff)} + 2C_{1212}^{(eff)} \right\} + \\ & + I^2 \left\{ \frac{\partial C_{1111}^{(eff)}}{\partial \mathbf{h}} + \frac{\partial C_{1122}^{(eff)}}{\partial \mathbf{h}} + 2 \frac{\partial C_{1212}^{(eff)}}{\partial \mathbf{h}} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

Pierwszy składnik tego wyrażenia jest różny od 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wektor \mathbf{h} zawiera jakiegokolwiek parametry geometryczne komórki, np. promień włókna czy też grubość warstwy laminatu. Analogiczna analiza

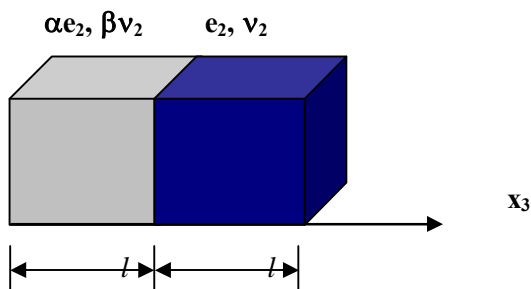
może zostać przeprowadzona w przypadku kompozytów periodycznych z osiowym rozkładem składników i wówczas trójwymiarowy stan równomiernych odkształceń jednostkowych $\varepsilon_{ij} = 1$ dla $i, j = 1, 2, 3$ jest zdefiniowany na jednostkowej próbce sześcienniej kompo-

zytu, a więc funkcjonal G dla kompozytu ujednorodnionego definiuje się dzięki symetrii jako

$$G = \frac{1^3}{2} \left(C_{1111}^{(eff)} + C_{1212}^{(eff)} + 2C_{1313}^{(eff)} + 2C_{1133}^{(eff)} + \frac{1}{2} C_{3333}^{(eff)} \right) \quad (22)$$

ANALIZA NUMERYCZNA

Równania opisujące własności efektywne przedstawionych kompozytów zostały zaimplementowane w systemie komputerowym do obliczeń symbolicznych MAPLE w celu matematycznego wyznaczenia gradientów wrażliwości składowych badanego tensora. Obliczenia zostały wykonane dla kompozytu pokazanego na rysunku 1 dla następujących danych materiałowych: (a) słabszy materiał $E_2 = 4,0E9$, $\nu_2 = 0,34$, $c_2 = 0,5$ oraz (b) wzmocnienie: $E_1 = 4,0E9 \cdot \alpha$, $\nu_1 = 0,34 \cdot \beta$, $c_1 = 0,5$.

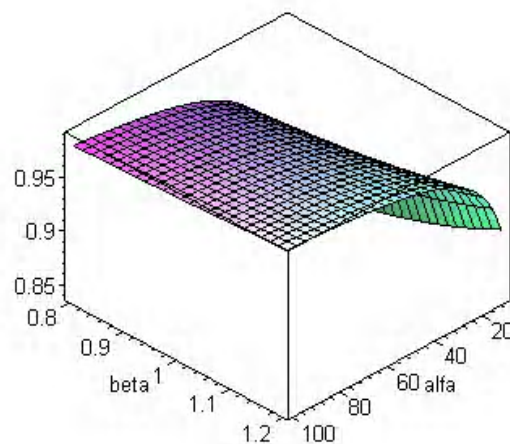


Rys. 1. Komórka periodyczności kompozytu jednokierunkowego

Fig. 1. Periodicity cell of the unidirectional composite

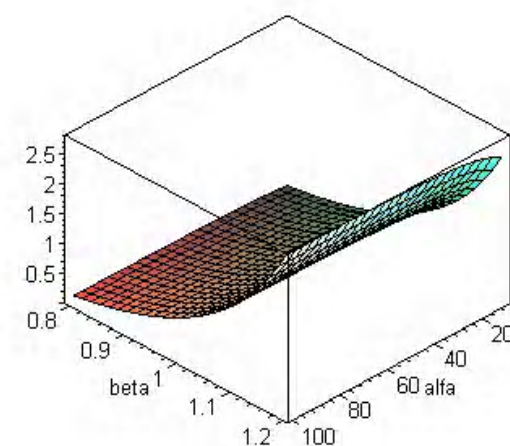
Parametry projektowe α oraz β zostały wprowadzone dla odpowiednich danych materiałowych składników w celu zilustrowania wpływu kontrastu pomiędzy modułami Younga i współczynnikami Poissona obydwu warstw. Modelowanie takie może znaleźć zastosowanie w optymalizacji projektowanego kompozytu w różnych zastosowaniach praktycznych w oparciu o teorię homogenizacji. Odpowiednie gradienty wrażliwości pierwszej składowej efektywnego tensora sprężystości $C_{1111}^{(eff)}$ zostały przedstawione na rysunkach 2-5 w odniesieniu do modułu Younga zbrojenia, współczynnika Poissona dla zbrojenia oraz kolejno - dla odpowiednich charakterystyk materiału słabszego; wykresy zawierają wielkości numerycznie znormalizowane. Jak wynika ze zgromadzonych wyników, w przedstawionym zakresie parametrów wszystkie gradienty są dodatnie, a więc wzrost

dowolnego z analizowanych parametrów powoduje przyrost rozpatrywanej składowej efektywnego tensora sprężystości. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że współczynnik Poissona zbrojenia ma największy wpływ przy optymalizacji tej składowej.



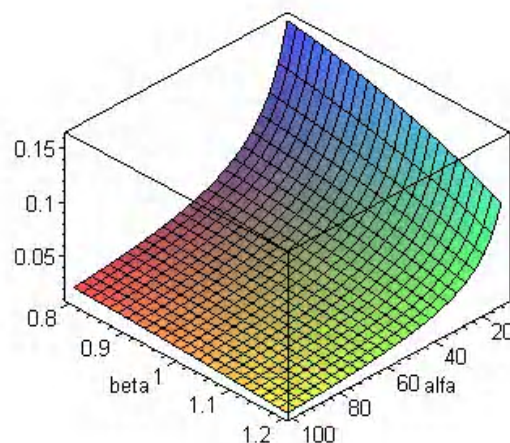
Rys. 2. Pochodna cząstkowa $C_{1111}^{(eff)}$ względem modułu Younga zbrojenia

Fig. 2. Partial derivatives of $C_{1111}^{(eff)}$ w.r.t. reinforcement Young modulus



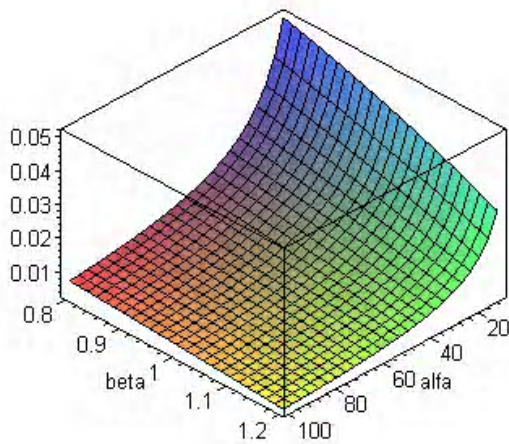
Rys. 3. Pochodna cząstkowa $C_{1111}^{(eff)}$ względem współczynnika Poissona zbrojenia

Fig. 3. Partial derivatives of $C_{1111}^{(eff)}$ w.r.t. reinforcement Poisson ratio



Rys. 4. Pochodna cząstkowa $C_{1111}^{(eff)}$ względem modułu Younga materiału słabszego

Fig. 4. Partial derivatives of $C_{1111}^{(eff)}$ w.r.t. matrix Young modulus



Rys. 5. Pochodna cząstkowa $C_{1111}^{(eff)}$ względem współczynnika Poissona materiału słabszego

Fig. 5. Partial derivatives of $C_{1111}^{(eff)}$ w.r.t. matrix Poisson ratio

TABELA 1. Gradienty wrażliwości własności efektywnych kompozytu jednokierunkowego

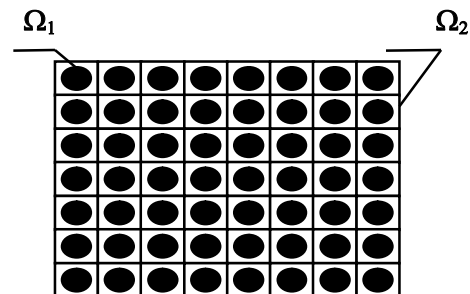
TABLE 1. Sensitivity gradients of the effective properties for the unidirectional composite

h	$\frac{\partial C_{1111}^{(eff)}}{\partial h}$	$\frac{\partial C_{3333}^{(eff)}}{\partial h}$	$\frac{\partial C_{1133}^{(eff)}}{\partial h}$	$\frac{\partial C_{1122}^{(eff)}}{\partial h}$	$\frac{\partial C_{1212}^{(eff)}}{\partial h}$	G^{-h}
e_1	0,9041	0,1138	0,0603	0,7696	0,9584	3,9570
e_2	0,0959	0,8862	0,9397	0,2304	0,0451	2,5430
ν_1	-0,0476	0,0368	-0,2811	0,7849	-0,1728	-1,1099
ν_2	0,0338	1,2018	0,6254	0,1891	-0,0105	1,8538

Analizę wrażliwości można przeprowadzić przy ustalonych wartościach parametrów kontrastu danych materiałowych - dla konkretnego kompozytu, a której wyniki zostały podane w tabeli 1 w przypadku kompozytu włókna szklane/matryca epoksydowa z równymi udziałami objętościowymi składników. Jak wynika z tych rezultatów, przyrost modułów Younga obydwu składników powoduje wzrost wszystkich składowych efektywnego tensora sprężystości; w przypadku współczynnika Poissona znaki odpowiednich pochodnych są zarówno dodatnie, jak i ujemne, ale wszystkie pochodne są jednak różne od 0. Szczegółowe dane prowadzą do następujących wniosków: (a) składowa $C_{1111}^{(eff)}$ jest najbardziej wrażliwa na zmiany e_1 , potem - na e_2 , a w końcu na ν_2 i ν_1 (ostatni gradient jest ujemny); (b) $C_{3333}^{(eff)}$ jest najbardziej wrażliwa na zmiany ν_2 , w dalszym ciągu na e_2 , e_1 i najmniej na ν_1 ; wszystkie wielkości są dodat-

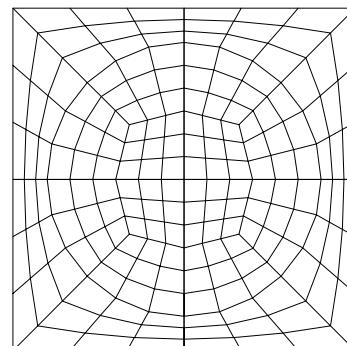
nie; (c) $C_{1133}^{(eff)}$ jest najbardziej wrażliwa na e_2 , ν_2 , e_1 , a w końcu na ν_1 (ostatni parametr powoduje ujemny gradient); (d) $C_{1122}^{(eff)}$ jest najbardziej wrażliwa na zmiany ν_1 i e_1 , potem e_2 oraz ostatecznie na ν_2 , gdzie wszystkie pochodne mają wartości dodatnie; (e) $C_{1212}^{(eff)}$ wykazuje największą wrażliwość w odniesieniu do e_1 , a potem na e_2 i wreszcie ν_2 oraz ν_1 , gdzie ostatnie dwa parametry wykazują ujemne pochodne cząstkowe.

Analizując w dalszym ciągu wartości pochodnych funkcjonału wrażliwości zgromadzone w tej tabeli, widać, że analizowany kompozyt jest najbardziej wrażliwy na moduł Younga zbrojenia, kolejno - na parametry e_2 oraz ν_2 , a w ostatniej kolejności - na współczynnik Poissona ν_1 włókna (ze znakiem ujemnym). Porównując te rezultaty z wynikami zamieszczonymi w tabeli 2 widać, że obydwa kompozyty mają podobne gradienty funkcjonału wrażliwości w odniesieniu do analogicznych parametrów projektowych. Jednocześnie, obydwa kompozyty wykazują ujemną wrażliwość w odniesieniu do współczynnika Poissona materiału wzmacniającego, co oznacza w praktyce, że w celu otrzymania kompozytu o lepszych własnościach efektywnych należy dążyć do zmniejszenia tego współczynnika. Należy zauważyć także, że w przypadku kompozytu jednowymiarowego równania opisujące składowe efektywnego tensora sprężystości zawierają udziały objętościowe składników (jak również ich liczbę), które mogą być odpowiednio uwzględnione w dalszej analizie wrażliwości jako parametry projektowe kompozytu.



Rys. 6. Periodyczny kompozyt włóknisty

Fig. 6. Periodic fiber-reinforced composite



Rys. 7. Dyskretyzacja MES komórki
Fig. 7. FEM discretization of the cell

W dalszej kolejności przeprowadzono analizę wrażliwości własności efektywnych kompozytu włóknistego, przedstawionego na rysunku 6, z podziałem komórki na elementy skończone pokazane na rysunku 7. Kompozyt jest periodyczny, długie włókna są idealnie połączone z matrycą, współczynnik zbrojenia jest równy 50%, a dane materiałowe są przyjęte z poprzedniego przykładu. Dyskretyzacja Metody Elementów Skończonych za pomocą czworokątnych i czterowzłowych elementów skończonych jest wykorzystana do symulacji przeprowadzonych programem MCCEFF. Wyniki wszystkich obliczeń zostały zestawione w tabeli 2 i ustalone poprzez uśrednienie gradientów obliczonych dla 1 i 10% przyrostu odpowiednich parametrów projektowych, znormalizowanych ostatecznie w oparciu o oryginalne dane materiałowe składników kompozytu. Analiza ta pokazuje, że najistotniejszym parametrem materiałowym jest współczynnik Poissona matrycy, a kolejno - moduły Younga włókna i matrycy; współczynnik Poissona włókna jest niemalże nieistotny w świetle zaprezentowanej analizy, ale posiada wartość ujemną. Analogiczne modelowanie wrażliwości należy powtórzyć w przypadku kompozytów o innej geometrii (np. eliptycznym włóknie), rozkładzie przestrzennym zbrojenia (heksagonalna komórka periodyczności) lub warstw oraz innych wartościach mechanicznych parametrów materiałowych.

TABELA 2. Gradienty wrażliwości własności efektywnych kompozytu włóknistego
TABLE 2. Sensitivity gradients of the effective properties for the fiber-reinforced composite

h	$\frac{\partial C_{1111}^{(eff)}}{\partial h}$	$\frac{\partial C_{1122}^{(eff)}}{\partial h}$	$\frac{\partial C_{1212}^{(eff)}}{\partial h}$	G^h
e_1	0,141	0,072	0,958	2,129
ν_1	0,056	0,180	-0,173	-0,090
e_2	0,867	0,926	-0,044	1,881
ν_2	1,205	2,814	-0,011	3,987

PODSUMOWANIE

Przedstawiona analiza wrażliwości efektywnych tensorów sprężystości kompozytów umożliwia znalezienie

na drodze odpowiedniego modelowania komputerowego najistotniejszych materiałowych parametrów

projektowych, a więc w rezultacie - odpowiednią i efektywną optymalizację takich materiałów. Równania opisujące gradienty wrażliwości dla zastosowanego modelu konstytutywnego mogą zostać rozszerzone na materiały sprężysto-plastyczne lub lepko-sprężysto-plastyczne, w kontekście zarówno deterministycznym, jak i losowym. Opracowana technika ze względu na dualny charakter zastosowanych metod numerycznych jest bardzo ogólna, jednakże może dawać zdecydowanie różne wyniki w przypadku innych metod homogenizacji dla tego samego kompozytu; prawidłowości wykazane podczas symulacji komputerowych są słuszne jedynie dla kompozytów wykonanych z włókien szklanych i matrycy epoksydowej.

LITERATURA

- [1] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam 1978.
- [2] Christensen R.M., Mechanics of Composite Materials, Wiley 1979.
- [3] Dems K., Mróz Z., Variational approach to sensitivity analysis in thermoelasticity, J. Thermal Stresses 1987, 10, 283-306.
- [4] Fish J., Ghouali A., Multiscale analytical sensitivity analysis for composite materials, Int. J. Num. Meth. Engrg. 2001, 50, 1501-1520.
- [5] Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G., Analysis, Design and Optimization of Composite Structures, Wiley 1997.
- [6] Kamiński M., Material sensitivity analysis in homogenization of the linear elastic composites, Arch. Appl. Mech. 2001, 71, 10, 679-694.
- [7] Lewiński T., Telega J.J., Plates, Laminates and Shells, Asymptotic Analysis and Homogenization, World Sci. Publ., Singapore 2000.
- [8] Lund E., Finite Element Based Design Sensitivity Analysis and Optimization, PhD Thesis, Aalborg University Press 1994.
- [9] Milton K., The Theory of Composites, Cambridge University Press 2002.
- [10] Sanchez-Palencia E., Non-homogeneous Media and Vibration Theory, Springer-Verlag 1980.

Recenzent
Andrzej P. Wilczyński