

Karol Dobryniewski¹

Politechnika Warszawska, Instytut Mechaniki i Konstrukcji, ul. Narbutta 85, 02-542 Warszawa

WYZNACZANIE STAŁYCH MATERIAŁOWYCH KOMPOZYTU WARSTWOWEGO O RÓŻNYCH WSPÓŁCZYNNIKACH WYPEŁNIENIA W WARSTWACH

Koniecznym warunkiem do określenia własności fizycznych kompozytów wzmocnionych tkaniną modułową jest przeprowadzenie rozszerzonych badań, eksperymentalnych lub analitycznych. Ten pierwszy sposób, czyli badania eksperymentalne w przypadku ogromnej różnorodności dostępnych tkanin modułowych, osnów i struktur możliwych do otrzymania, stanowiłyby bardzo duże nieekonomiczne przedsięwzięcie. Dlatego też najlepszym rozwiązaniem tego problemu jest stworzenie metody analitycznej, przewidującej własności fizyczne tych materiałów, co znacznie ograniczyłoby liczbę koniecznych badań eksperymentalnych. Praca ta przedstawia prymitywną teorię, opartą na nieco rozbudowanej teorii mieszanej dla kompozytów wzmocnionych tkaniną modułową. Określa stopień wiarygodności prostych wzorów, służących do oceny własności laminatów poprzez porównanie wyników teoretycznych z wynikami doświadczalnymi.

Słowa kluczowe: laminat, włókna, osnowa polimerowa, stałe materiałowe, model kompozytu, dane doświadczalne, współczynniki wypełnienia

DETERMINATION OF MATERIAL CONSTANTS LAMINATED COMPOSITE PLATES WITH DIFFERENT PLY REINFORCEMENT

Extensive studies are required to determinate values of material constants laminated composite plates with fabric reinforcement. The quantification can either be done experimentally or analytically. The innumerable diversity of woven fabrics, matrixes and potential combinations of the weave pattern in the fabric reinforced composites would make any experimental program very large and uneconomical. In this connection the best solution of this problem is to develop an analytical method to predict fabric composite behavior and validate the methodology through limited experimental studies. This validated analytical model can be used later to predict fabric composite behavior or to design fabric composites for a given set of conditions. In this work, a primitive theory has been shown, which is based on somewhat complicated theory for composites with fibre reinforcement. The purpose of this work is to study, in what degree the simple formulas, roughly estimating lamina properties, could be authenticated. This work consists of three parts. In the first part, composite model is presented (Fig. 1) that is considered as laminate consists of two unidirectional fibres-reinforced lamina. They are stacked that one lies crosswise against another and they can not displace between themselves. Unidirectional fibres are described by properties such as Young's modulus E_f , Poisson's rate ν_f . Fibers are embedded in a isotropic matrix material described by properties such as Young's modulus E_m , Poisson's rate ν_m . On the basis of this model, primitive theory is created, that makes the certain assumptions and restrictions, as stated here: perfect joint between layers, linearly elastic and orthotropic material of each layers, small strains and displacements, equal thickness of layers. At the end of part one author presents formulas of calculation Young's moduli of the laminate. Additionally author considers using the apparent Young's modulus of compressed fibre to calculating material constants of laminate. The second part includes formulas, that are used to determining shear module of laminate. Here analytical solutions are developed for optional computing elastic constants, which were present in the part one. In the last part comparison between theoretical and experimental measurements of material constants is presented (Tab. 1) to check effectiveness of present algorithm. Figures 1-3 show respectively laminate model, two cases of simple loading composite model by elementary force.

Key words: lamina, laminate, fibre material, polymer matrix material, material constants, composite model, experimental measurements, filling factor

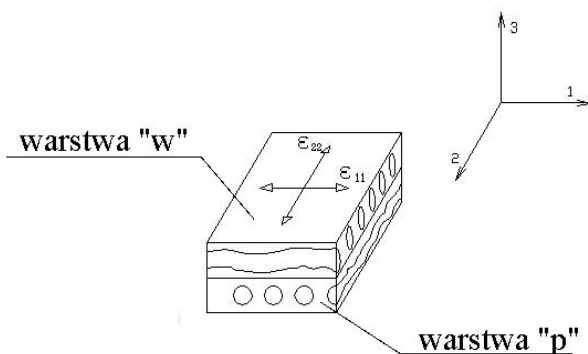
WSTĘP

Poniżej przedstawiona została prymitywna teoria, oparta na nieco rozbudowanej teorii mieszanej dla kompozytów wzmocnionych tkaniną modułową. Celem tego studium jest zbadanie, w jakim stopniu mogą być uwiarygodnione bardzo proste wzory, służące do zgrubnej oceny własności laminatów, jak np. laminatów ręcznie układanych.

ZAŁOŻENIA

Należy wprowadzić pewne założenia do określenia analitycznego algorytmu, służącego do wyznaczenia stałych sprężystych, kompozytu warstwowego przedstawionego na rysunku 1. Górna warstwa tego laminatu może mieć inny współczynnik wypełnienia niż warstwa dolna.

¹ mgr inż.



Rys. 1. Model kompozytu warstwowego o różnych wzmocnieniach warstw
Fig. 1. Model of laminated composite plates with different ply reinforcement

Kompozyt stanowi warstwa osnowy wzmocnionej jednokierunkowo włóknami (o właściwościach opisanych stałymi: modułem Younga E_f , współczynnikiem Poissona ν_f) zanurzonymi w izotropowej osnowie (o właściwościach danych przez stałe: moduł Younga E_o , współczynnik Poissona ν_o). Stosunek objętości włókien V_f do objętości warstwy V_c określa współczynnik wypełnienia f , który w przypadku rozpatrywanego modelu jest inny dla warstwy „p” i dla warstwy „w”

$$f = \frac{V_f}{V_c} = \frac{V_f}{V_o + V_f} \quad (1)$$

gdzie V_o jest objętością osnowy.

Wzmocnieniem osnowy jest pofalowane włókno wykazujące właściwości liniowe. Kształt osi włókna można zapisać w postaci funkcji okresowej. W przypadku ściskania kompozytu w kierunku ułożenia włókien wzmocniających istnieje możliwość utraty styczności pojedynczych włókien. W wyniku obliczeń zawartych w pracy [1] otrzymuje się pozorną wartość modułu Younga dla pofalowanego i zanurzonego w osnowie włókna

$$E_a = \frac{E_w}{1 + 8 \left(\frac{a}{d} \right)^2} \quad (2)$$

gdzie:

E_w - moduł Younga włókna,
 a - amplituda fali,
 d - średnica włókna.

Kolejnym etapem rozwiązania jest wyznaczenie stałych kompozytowych E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21} , G_{12} oddzielnie dla warstwy „p” i dla warstwy „w”. Poniższe wzory określone dla warstwy „w” zostały wyprowadzone w pracy [2]:

$$E_{w11} = E_o(1 - f_w) + E_a f_w \quad (3)$$

$$E_{w22} = \frac{E_o \left[E_o (1 - \sqrt{f_w}) + E_a \sqrt{f_w} \right]}{E_o \left[1 + \sqrt{f_w} (1 - \sqrt{f_w}) \right] + E_a \sqrt{f} (1 - \sqrt{f_w})} \quad (4)$$

$$\nu_{w21} = \nu_o (1 - \sqrt{f_w}) + \nu_w \sqrt{f_w} \quad (5)$$

$$\nu_{w12} = \nu_{w21} \frac{E_{w22}}{E_{w11}} \quad (6)$$

$$G_{w12} = G_o \frac{G_o \sqrt{f_w} (1 - \sqrt{f_w}) + G_w (1 - \sqrt{f_w} (1 - \sqrt{f_w}))}{G_o \sqrt{f_w} + G_w (1 - \sqrt{f_w})} \quad (7)$$

WYZNACZANIE UŚREDNIONYCH WARTOŚCI MODUŁÓW YOUNGA I WSPÓŁCZYNNIKÓW POISSONA

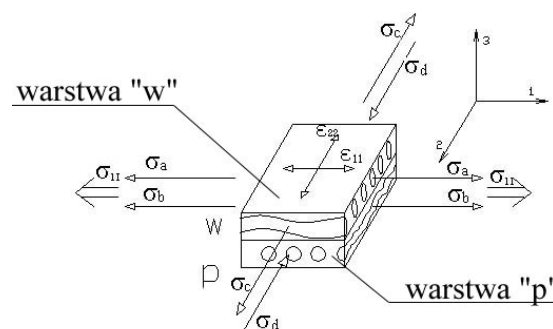
Model kompozytu wzmocnionego tkaniną rozpatrywany jest jako laminat składający się z dwóch warstw wzmocnionych jednokierunkowo, leżących krzyżowo jedna na drugiej, przy czym warstwy te nie mogą się między sobą przemieszczać, co zapewniają zależności:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_{11}^w = \varepsilon_{22}^p \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \varepsilon_{22}^w = \varepsilon_{11}^p \end{aligned} \quad (8)$$

Zakłada się jednakową grubość obu warstw składowych.

W wyniku rozciągania kompozytu w kierunku 1, ze względu na różne wartości współczynników Poissona, na skraju warstw występują naprężenia normalne działające w kierunku 2, których wartości są równe, a kierunki działania przeciwne, zapewniające wyrównanie odkształceń warstw, jak pokazano na rysunku 2L

$$\begin{aligned} \sigma_c + \sigma_d &= 0 \\ \text{lub} \\ N_c + N_d &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$



Rys. 2. Układ naprężeń średnich w kompozycie przy rozciąganiu siłą jednostkową wzdłuż kierunku 1

Fig. 2. System of mean stresses in a composite during stretching by elementary forces in 1 direction

Do obliczeń przyjmuje się, że model kompozytu jest rozciągany siłą równą 1 i rozdziela się ona w pewien sposób na obie warstwy

$$N_a + N_b = 1 \quad (10)$$

Z ogólnej zależności

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} N_{ij} \quad (11)$$

w zagadnieniu dwuwymiarowym, otrzymuje się kolejne dwa równania na odkształcenie wzdłużne warstwy „w”, gdzie:

$$[A_{ij}] = \frac{[S_{ijkl}]}{g_w}$$

g_w - grubość warstwy,

S_{ijkl} - tensor podatności materiału dla warstwy „w”

$$S_{ijkl} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{w11}} & -\frac{\nu_{w21}}{E_{w11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{w12}}{E_{w22}} & \frac{1}{E_{w22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{w12}} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Równanie konstytutywne dla warstwy „w” przyjmuje postać

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^w \\ \varepsilon_{22}^w \\ \varepsilon_{12}^w \end{pmatrix} = \frac{1}{g_w} \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{w11}} & -\frac{\nu_{w21}}{E_{w11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{w12}}{E_{w22}} & \frac{1}{E_{w22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{w12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_a \\ N_c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Analogicznie postępuje się przy obliczaniu odkształceń warstwy „p” i w tym przypadku otrzymuje się

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^p \\ \varepsilon_{22}^p \\ \varepsilon_{12}^p \end{pmatrix} = \frac{1}{g_w} \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{p11}} & -\frac{\nu_{p21}}{E_{p11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{p12}}{E_{p22}} & \frac{1}{E_{p22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{p12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_b \\ N_d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Wykonując działania według (13) i (14), dołączając (9) i (10) i spełniając układ (8), tworzy się układ sześciu równań liniowych:

$$N_c + N_d = 0$$

$$N_a + N_b = 1$$

$$\frac{N_a}{E_{p11}} - \frac{\nu_{p21} N_c}{E_{p11}} - g_w \overline{\varepsilon_{11}} = 0$$

$$\frac{N_c}{E_{p22}} - \frac{\nu_{p12} N_a}{E_{p22}} - g_w \overline{\varepsilon_{22}} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{N_b}{E_{w11}} - \frac{\nu_{w21} N_d}{E_{w11}} - g_w \overline{\varepsilon_{22}} = 0$$

$$\frac{N_d}{E_{w22}} - \frac{\nu_{w12} N_b}{E_{w22}} - g_w \overline{\varepsilon_{11}} = 0$$

Układ równań rozwiązuje się symbolicznie lub numerycznie i otrzymuje się uśrednione wartości:

$$N_a, N_b, N_c, N_d, \overline{\varepsilon_{11}}, \overline{\varepsilon_{22}}.$$

Ostatecznym krokiem jest obliczenie uśrednionej wartości modułu Younga oraz uśrednionej wartości współczynnika Poissona dla całego modelu kompozytu. W tym przypadku model ten rozpatruje się już jako monolit rozciągany naprężeniem $\sigma_{11} = 1$ wzdłuż kierunku 1. Naprężenia wzdłuż kierunku 2 redukują się. Z równania

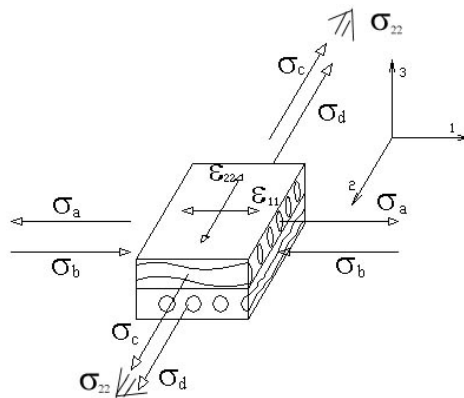
$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{ij} \quad (16)$$

otrzymuje się:

$$\overline{E_{11}} = \frac{1}{\overline{\varepsilon_{11}}} \quad (17)$$

$$\overline{\nu_{21}} = -\overline{E_{11}} \overline{\varepsilon_{22}}$$

W celu obliczenia uśrednionego modułu Younga w osi 2 E_{22} oraz ν_{12} laminatu model kompozytu (rys. 1) należy poddać rozciąganiu siłą jednostkową wzdłuż osi 2 (zgodnie z rysunkiem 3) i przeprowadzić analogiczne obliczenia.



Rys. 3. Układ naprężeń średnich w kompozycie rozciągany siłą jednostkową w kierunku 2

Fig. 3. System of mean stresses in a composite during stretching by elementary forces in 2 direction

Z rysunku 3 wynikają równości:

$$\begin{aligned} \sigma_c + \sigma_d &= 1 \\ \sigma_a + \sigma_b &= 0 \\ \text{lub} \\ N_c + N_d &= 1 \\ N_a + N_b &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Wykonując działania według (13) i (14), dołączając (18) i spełniając układ (8), tworzy się układ sześciu równań liniowych:

$$\begin{aligned} N_c + N_d &= 1 \\ N_a + N_b &= 0 \\ \frac{N_a}{E_{p11}} - \frac{\nu_{p21} N_c}{E_{p11}} - \overline{g_w} \overline{\varepsilon_{11}} &= 0 \\ \frac{N_c}{E_{p22}} - \frac{\nu_{p12} N_a}{E_{p22}} - \overline{g_w} \overline{\varepsilon_{22}} &= 0 \\ \frac{N_b}{E_{w11}} - \frac{\nu_{w21} N_d}{E_{w11}} - \overline{g_w} \overline{\varepsilon_{22}} &= 0 \\ \frac{N_d}{E_{w22}} - \frac{\nu_{w12} N_b}{E_{w22}} - \overline{g_w} \overline{\varepsilon_{11}} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

W wyniku rozwiązania układu otrzymuje się uśrednione wartości odkształceń $\overline{\varepsilon_{11}}, \overline{\varepsilon_{22}}$, które posłużą do obliczenia uśrednionej wartości modułu Younga i współczynnika Poissona. Model kompozytu rozpatruje się jako monolit rozciągany naprężeniem $\sigma_{22} = 1$ wzdłuż kierunku 2. Naprężenia wzdłużne kierunku 1 redukują się. Z równania (16), jak poprzednio, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \overline{E_{22}} &= \frac{1}{\overline{\varepsilon_{22}}} \\ \overline{\nu_{12}} &= -\overline{E_{22}} \overline{\varepsilon_{11}} \end{aligned} \quad (20)$$

WYZNACZENIE MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI POSTACIOWEJ

Na podstawie założeń [8], czyli

$$\varepsilon_{ij}^K = \varepsilon_{ij}^W \quad (21)$$

gdzie:

ε_{ij}^K - odkształcenia całego kompozytu,

ε_{ij}^W - odkształcenia pojedynczej warstwy,

wynika równość

$$\sigma_{ij}^K g_k = \sum_{w=1}^n \sigma_{ij}^w g_w \quad (22)$$

gdzie:

$$\sigma_{ij}^K = C_{ijkl}^K \varepsilon_{ij}^K, \sigma_{ij}^w = C_{ijkl}^w \varepsilon_{ij}^w \quad (23)$$

g_w - grubość warstwy,

g_k - grubość kompozytu.

Po podstawieniu równań (23) i (21) do równania (22) otrzymuje się

$$C_{ijkl}^K = \sum_{w=1}^n \frac{g_w}{g_K} C_{ijkl}^w \quad (24)$$

Zależność pomiędzy tensorem podatności a sztywności przedstawia się w postaci

$$S = C^{-1} \quad (25)$$

Po podstawieniu do równania (24) tensora sztywności warstwy „p” i „w” otrzymanych w wyniku przekształcenia odpowiednich tensorów podatności za pomocą wzoru (25) i przy założeniu, że grubości warstw w laminacie są równe, ostatecznie otrzymuje się wzór na tensor sztywności całego kompozytu

$$C_{ijkl}^K = 0.5C_{ijkl}^w + 0.5C_{ijkl}^p \quad (26)$$

Stąd moduł Kirchhoffa na kierunku głównym dla całego modelu kompozytu przyjmuje postać

$$\overline{G_{12}} = C_{66}^K \quad (27)$$

gdzie

C_{66}^K - stanowi składową tensora sztywności całego kompozytu obliczonego z równania (26).

Na podstawie wzoru (26) można także obliczyć pozostałe składowe tensora podatności $C_{11}^K, C_{22}^K, C_{12}^K, C_{21}^K$, które można przekształcić na stałe materiałowe, uzyskując poniższe zależności:

$$\begin{aligned} \overline{\nu_{12}} &= \frac{C_{12}^K}{C_{22}^K}, \overline{\nu_{21}} = \frac{C_{21}^K}{C_{11}^K} \\ \overline{E_{11}} &= C_{11}^K (1 - \overline{\nu_{12}} \overline{\nu_{21}}) \\ \overline{E_{22}} &= C_{22}^K (1 - \overline{\nu_{12}} \overline{\nu_{21}}) \end{aligned} \quad (28)$$

PORÓWNANIE WYNIKÓW DOŚWIADCZALNYCH Z TEORETYCZNYMI

Skuteczność przedstawionego algorytmu może zostać sprawdzona jedynie poprzez porównanie z danymi doświadczalnymi, zamieszczonymi w tabeli 1. Wartości doświadczalne stałych materiałowych kompozytu epoksydowo-szklanego (e-glass/epoxy) oraz wyniki pomiarów do obliczeń wzięto z pracy [3]. Badaniu poddano próbki laminatu, składające się z 8 jednokierunkowo

wzmocnionych warstw (grubość warstwy 0,20 mm). Warstwy w kompozycie posiadają poprzeczną strukturę ułożenia $[0/90]_s$. Poszczególne warstwy w laminacie wykazują inne współczynniki wypełnienia zgodnie z danymi zawartymi w tabeli 1. Stałe materiałowe dla osnowy wynoszą: $E_o = 3,5$ GPa, $\nu_{o12} = 0,3$ dla włókna: $E_w = 72$ GPa, $\nu_{w12} = 0,35$. Niestety poza wynikami dotyczącymi modułów Younga dane doświadczalne w tym przypadku nie były dostępne.

Z tabeli tej wynika, że w przedstawionym przypadku nie ma powodu uwzględniać pozornego modułu Younga wywołanego pofalowaniem wzmocnienia przynajmniej przy rozciąganiu. Prawdopodobnie wpływa na to istnienie osnowy, przynajmniej częściowo usuwając zginanie.

TABELA 1. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi modułów Younga kompozytu epoksydowo-szklanego o poprzecznej strukturze ułożenia warstw wzmocnionych jednokierunkowo $[0/90]_s$

TABLE 1. Comparison between theoretical and experimental measurements of Young's modulus of composite E-glass/epoxy $[0,90]_s$

| Lp. | Współczynnik wypełnienia f | | Dane doświadczalne | | Wyniki teoretyczne bez uwzględnienia pozornego modułu Younga włókna E_a | | Wyniki teoretyczne z uwzględnieniem pozornego modułu Younga włókna E_a | |
|-----|------------------------------|------------|--------------------|-------|---|-------|--|--------|
| | Warstwa 0 | Warstwa 90 | E_x | E_y | E_x | E_y | E_x | E_y |
| 1 | 0,43 | 0,43 | 18,4 | 18,4 | 18,68 | 18,68 | 16,243 | 16,243 |
| 2 | 0,10 | 0,60 | 11,97 | 24,57 | 11,24 | 24,6 | 6,91 | 9,75 |
| 3 | 0,20 | 0,60 | 15,41 | 25,14 | 14,68 | 25,15 | 7,932 | 10,064 |

| | | | GPa | GPa | GPa | GPa | GPa | GPa |
|---|------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 1 | 0,43 | 0,43 | 18,4 | 18,4 | 18,68 | 18,68 | 16,243 | 16,243 |
| 2 | 0,10 | 0,60 | 11,97 | 24,57 | 11,24 | 24,6 | 6,91 | 9,75 |
| 3 | 0,20 | 0,60 | 15,41 | 25,14 | 14,68 | 25,15 | 7,932 | 10,064 |

Przedstawiany w tej pracy model dwuwarstwowego laminatu o strukturze poprzecznej ułożenia warstw w kompozycie $[0/90]_s$ i o różnym współczynniku wzmocnienia tych warstw wykazuje w czasie jednokierunkowego rozciągania niesymetryczny rozkład naprężeń w warstwach, co powoduje powstanie momentu gnącego. W pracach doświadczalnych stosuje się próbki laminatu o symetrycznej budowie, które w czasie rozciągania podlegają płaskiemu stanowi naprężeń.

Autor pragnie podziękować za współpracę i opiekę Panu prof. Andrzejowi P. Wilczyńskiemu.

LITERATURA

- [1] Wilczyński A.P., Polimerowe kompozyty włókniste, WNT, Warszawa 1996.
- [2] Wilczyński A. P., J. Mater. Sci. Letters 1992, 11, 482-483.
- [3] Niranjana K.N., Woven fabric composite, Technomic Publishing Company 1994.

Recenzent
Józef Koszkuł