

Józef Gawroński¹, Ewa Majchrzak², Mirosław Cholewa³, Piotr Wróbel⁴

Politechnika Śląska, Wydział Mechaniczny Technologiczny, ul. Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice

MODEL MATEMATYCZNY PRZEPIŹYU CIEPŁA W KOMPOZYTOWEJ WARSTWIE STOPOWEJ

Zastosowanie technologii otrzymywania powierzchniowych kompozytowych warstw stopowych na wybranych powierzchniach odlewu umożliwia uzyskanie szczególnych użytkowych własności odlewu. Kompozytowe warstwy stopowe na staliwie wykonane w założonych warunkach kształtują się z fazy ciekłej. Procesy, zachodzące w formie podczas kształtowania warstwy kompozytovej, przebiegają przy niestabilnym przepływie ciepła, czyli przy niestabilnym polu temperatury. Obniżenie się temperatury w warstwie przyściennej odlewu w formie powoduje stopniowe ustanie procesów. Ich intensywność zależy od intensywności stygnięcia odlewu w formie i ma decydujący wpływ na efekt umocnienia kompozytowego wybranych powierzchni odlewów stalowych. W ramach badań nad kompozytowymi warstwami stopowymi opracowano matematyczny model przepływu ciepła i symulację komputerową procesu krzepnięcia i stygnięcia w trakcie powstawania kompozytovej warstwy stopowej na kulistym odlewie stalowym (rys. rys. 1-3). Kształt ten dopuszcza przyjęcie założenia, że przepływ ciepła ma charakter jednowymiarowy, a gradient ma tylko jedną składową. Analizowany był układ odlew-wkładka kompozytuja-ca-forma w układzie współrzędnych sferycznych. Uwzględniono trzy średnice odlewów kulistych (60, 80 i 100 mm), trzy grubości warstwy kompozytujacej (2, 3 i 4 mm) oraz trzy temperatury zalewania (1550, 1600 i 1650°C).

Słowa kluczowe: kompozyty, kompozytowe warstwy stopowe

THE MATHEMATICAL MODEL OF HEAT FLOW IN COMPOSITE ALLOY LAYERS

The use of composite alloy layers on chosen surfaces of cast makes possible to obtain a special usable properties. Composite alloy layers on cast steel shapes with liquid phase. The processes which set in form during formation of composite layer, progress beside the transient heat flow that the transient thermal field. Decrease of temperature in surface layer of cast causes gradual stoppage of these processes. Their intensity depends from conditions of self-coolings of the cast in form and has decisive influence on the composite consolidation of chosen cast steel surfaces. The aim of these investigation was to obtain the mathematical model of heat flow and computer simulation of the solidification and self-cooling processes in time of formation the composite alloy layer on spherical cast (Figs. 1-3). This shape permits to make an assumption that the heat flow has one - dimensional character, and gradient has only ones component. The system of cast-composite plug-form was analysed in spherical coordinates. It was considered three diameters of spherical casts (60, 80 and 100 mm), three thicknesses of composite layers (2, 3 and 4 mm) and three pouring temperatures (1550, 1600 and 1650°C).

Key words: composite, composite alloy layers

OPIS MATEMATYCZNY PROCESU KRZEPNIĘCIA I STYGIĘCIA ODLEWU Z WKŁADKĄ KOMPOZYTUJĄCĄ NA POWIERZCHNI FORMY

Proces tworzenia się powierzchniowej warstwy kompozytovej z wkładki na wewnętrznej powierzchni formy sporządzonej z materiałów stopowych ziarnistych (Cr, Mo, Si, Mn) w sensie technologicznym i cieplnym jest zbliżony do zagadnienia miejscowego ochładzania odlewu „luźnym” ochładzalnikiem zewnętrznym, o niewielkiej grubości (2÷5 mm), za to o skoncentrowanej masie składnika stopowego, który po roztopieniu dyfunduje w głąb odlewu. W związku z tym problem krzepnięcia metalu w formie należy do grupy zadań brzegowo-początkowych nazywanych zadaniami z ruchomymi granicami (moving boundary problems) [5, 6]. Proces krzepnięcia i stygnięcia opisują równania różniczkowe cząstkowe typu parabolicznego

i najbardziej charakterystyczną cechą odróżniającą zagadnienia termodynamiki procesów odlewniczych od typowych zadań z dziedziny przepływu ciepła są zmienne w czasie kształty podobszarów odpowiadających wyróżnionym fazom (stanom skupienia) metalu, równocześnie niestacjonarne pole temperatury w rozważanym obszarze jest polem źródłowym, ponieważ przemiany zachodzące w procesie krzepnięcia są związane z wydzielaniem się ciepła utajonego. Występujący w równaniu różniczkowym składnik determinujący sposób wydzielania się ciepła przemiany nazywany jest funkcją źródła. Opisy matematyczne procesu krzepnięcia opierające się na równaniu energii z funkcją źródła należą do

¹ prof. zw. dr inż., ² prof. zw. dr hab. inż., ³ dr inż., ⁴ inż.

tw. modeli matematycznych drugiej generacji lub też modeli makro-mikro. W praktyce obliczeń cieplnych związanych z krzepnięciem odlewu w formie rozważa się jednak najczęściej równania, w których oddziaływanie funkcji źródła uwzględnia się bądź przez wprowadzenie do opisu matematycznego tzw. zastępczej pojemności cieplnej, bądź przez uzupełnienie opisu matematycznego procesów cieplnych warunkiem brzegowym (zadany na granicy rozdziału faz), który w literaturze nazywany jest warunkiem brzegowym Stefana. Taki sposób podejścia umożliwia analizę procesu krzepnięcia odlewu na poziomie makroskopowym.

W zależności od potrzeb można rozpatrywać modele dotyczące układu odlew-forma lub też modele opisujące krzepnięcie metalu, w których oddziaływanie cieplne formy zastępuje się określonym warunkiem brzegowym, np. zakłada się a priori pewną funkcję opisującą zmienną w czasie (lub ustaloną) temperaturę kontaktu na zewnętrznej powierzchni odlewu lub strumień ciepła oddawany od obszaru odlewu do obszaru formy itd., ale uproszczenia te, które w klasycznych rozwiązaniach analitycznych były niezbędne, w przypadku metod symulacji komputerowej nie są konieczne.

Równanie różniczkowe opisujące niestacjonarne pole temperatury w obszarze krzepnącego odlewu przyjmuje się zwykle w następującej postaci:

$$X \in D(t): c(T) \frac{\partial T(X, t)}{\partial t} = \operatorname{div} [\lambda(T) \operatorname{grad} T(X, t)] + q_V(X, t) \quad (1)$$

gdzie X jest punktem z obszaru odlewu, T - temperaturą, t - czasem, $c(T)$ - ciepłem właściwym odniesionym do jednostki objętości, J/m^3K , $\lambda(T)$ - przewodnością cieplną W/mK , $q_V(X, t)$ - funkcją źródła.

Klasyczny problem Stefana (sformułowany w drugiej połowie XIX wieku) sprowadza się do zagadnienia brzegowo-początkowego, w którym zamiast równania (1) rozpatruje się dwa równania w postaci

$$X \in D_p(t): c_p(T) \frac{\partial T_p(X, t)}{\partial t} = \operatorname{div} [\lambda_p(T) \operatorname{grad} T_p(X, t)] \quad p=1, 2 \quad (2)$$

gdzie wskaźnik $p=2$ identyfikuje podobszar ciekłego metalu, natomiast $p=1$ - zakrzepłą część odlewu. Powierzchniowe źródła ciepła działają na granicy rozdziału faz i odpowiedni warunek brzegowy, będący różniczkową postacią bilansu energii między podobszarami cieczy i ciała stałego, jest następujący:

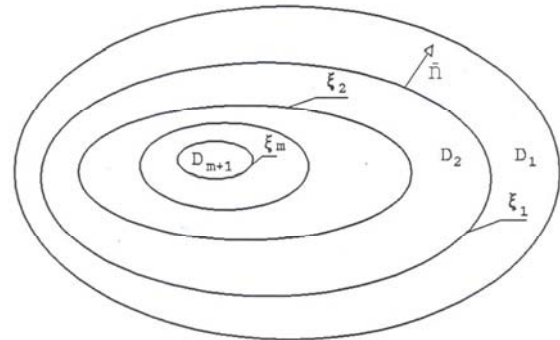
$$X \in \xi_{12}(t): \begin{cases} -\lambda_2 \bar{n} \cdot \operatorname{grad} T_2(X, t) = -\lambda_1 \bar{n} \cdot \operatorname{grad} T_1(X, t) + L_{Vn}, \\ T_2(X, t) = T_1(X, t) = T^* \end{cases} \quad (3)$$

przy czym $n \cdot \operatorname{grad} T$ jest pochodną normalną do granicy rozdziału faz, v_n - prędkością przyrostu warstwy zakrzepłej w kierunku normalnym, L - utajonym ciepłem krzepnięcia odniesionym do jednostki objętości J/m^3 , T^* - temperaturą przemiany fazowej. Z rozwiązania Stefana wynika między innymi fundamentalne w termodynamice procesów odlewniczych prawo pierwiastkowe, opisujące przyrost grubości warstwy zakrzepłej w czasie. Obecnie rozważa się również modele krzepnięcia z kilkoma przystankami (kilkoma przemianami fazowymi zachodzącymi w stałej temperaturze), tzn. modele typu (rys. 1):

$$\left. \begin{aligned} X \in D_p(t): c_p(T) \frac{\partial T_p(X, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} [\lambda_p(T) \operatorname{grad} T_p(X, t)], \\ &p=1, 2, \dots, m+1 \\ X \in \xi_p(t): \begin{cases} -\lambda_{p+1}(T) \bar{n} \cdot \operatorname{grad} T_{p+1}(X, t) = -\lambda_p \bar{n} \cdot \operatorname{grad} T_p(X, t) + L_p v_{np} \\ T_{p+1}(X, t) = T_p(X, t) = T_p^* \end{cases} \\ X \in \Gamma_0: \Phi(T, \bar{n} \cdot \operatorname{grad} T) &= 0 \\ t=0: T_p(X, 0) &= T_{p0}(X), \quad p=1, 2, \dots, m+1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gdzie $p=1, 2, \dots, m+1$ wyróżnia kolejne fazy, przy czym wskaźnik $p=m+1$ dotyczy fazy najcieplejszej, a $p=1$ najzimniejszej. Symbolem Γ_0 oznaczono zewnętrzną powierzchnię odlewu, dla której zadany jest określony warunek brzegowy zapisany w sposób zupełnie formalny, $T_{p0}(X)$ oznacza warunek początkowy zadania.

Przyjęcie warunku Stefana odpowiada hipotezie, że metal krzepnie w stałej temperaturze i wewnętrzne źródła ciepła są źródłami powierzchniowymi. W rzeczywistości jednak proces krzepnięcia i krystalizacji przebiega nieco inaczej, a mianowicie ilość wydzielonej fazy stałej zależy od lokalnej wartości przechłodzenia poniżej temperatury równowagi, a więc nawet w tym przypadku proces związany z określonym przedziałem temperatury.



Rys. 1. Wielofazowy obszar odlewu
Fig. 1. Multiphase area of cast

Krzepnięcie typowych stopów zachodzi w przedziale temperatury, który określają (przy pewnych założeniach) temperatury likwidusu i solidusu. W dalszej części niniejszego punktu oznaczane będą one przez T_L i T_S . Funkcja źródła w równaniu (1) (zredukowana w modelu Stefana do warunku brzegowego) jest funkcją postaci

$$q_V(X, t) = L \frac{\partial S(X, t)}{\partial t} = -L \frac{\partial S(X, t)}{\partial t} \quad (5)$$

gdzie $S(X, t)$ jest lokalnym udziałem fazy stałej w otoczeniu rozważanego punktu X w obszarze odlewu, natomiast (X, t) lokalnym udziałem cieczy. Taka postać funkcji źródła może być przyjmowana zarówno w przypadku krzepnięcia w stałej temperaturze, jak i w przypadku krzepnięcia w interwale temperatury. W modelach makroskopowych krzepnięcia stopów zakłada się, że lokalny udział ciała stałego (cieczy) jest funkcją temperatury w rozważanym punkcie, skąd wynika, że

$$q_V(X, t) = L \frac{\partial S(X, t)}{\partial t} = L \frac{\partial T(X, t)}{\partial t} \frac{dS(T)}{dT} \quad (6)$$

Przy powyższym założeniu człon źródłowy w równaniu przewodnictwa można „dołączyć” do lewej strony tego równania i otrzymuje się

$$X \in D(t): \left[c(T) - L \frac{dS(T)}{dT} \right] \frac{\partial T(X, t)}{\partial t} = \text{div} [\lambda(T) \text{grad} T(X, t)] \quad (7)$$

Występujący w ostatnim równaniu parametr termofizyczny

$$C(T) = c(T) - L \frac{dS(T)}{dT} \quad (8)$$

nazywany jest zastępczą pojemnością cieplną, a jeśli rozważania ograniczymy do przedziału temperatur krzepnięcia - zastępczą pojemnością cieplną strefy dwufazowej.

Modele krzepnięcia wykorzystujące zastępczą pojemność cieplną strefy dwufazowej są bardzo efektywne w realizacji numerycznej, a przy tym stanowią dobrą aproksymację krzepnięcia niektórych stopów, np. staliwa.

Występujące w opisach matematycznych warunki brzegowe na zewnętrznej powierzchni odlewu można sprowadzić do warunków nazywanych w literaturze warunkami pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju. Należy w tym miejscu podkreślić, że najlepszą aproksymacją rzeczywistych warunków wymiany ciepła na tej powierzchni jest tzw. warunek czwartego rodzaju, który zostanie omówiony w dalszej części artykułu.

Do tego miejsca opis matematyczny krzepnięcia metalu ograniczono jedynie do obszaru odlewu. Model

scalony powinien obejmować jednak układ odlew-formotoczenie. Tak więc równanie różniczkowe (lub układ równań różniczkowych) opisujące procesy krzepnięcia i stygnięcia metalu należy uzupełnić równaniem lub równaniami dotyczącymi przepływu ciepła w obszarze formy, na zewnętrznej powierzchni formy przyjmując odpowiedni warunek brzegowy, natomiast wymianę ciepła między odlewem a formą opisać następującym warunkiem:

$$X \in \Delta \Gamma_{IV}: \begin{cases} -\lambda_o \bar{n} \cdot \text{grad} T_o(X, t) = -\lambda_f \bar{n} \cdot \text{grad} T_f(X, t) \\ T_o(X, t) = T_f(X, t) \end{cases} \quad (9)$$

Symbole o, f identyfikują obszar odlewu i formy. W przypadku analizy krzepnięcia układów typu wlewk-wlewnica lub odlew-kokila warunek IV rodzaju ma nieco inną postać (przede wszystkim nie jest zachowany postulat ciągłości pola temperatury). Szczegóły dotyczące numerycznej aproksymacji odpowiedniego warunku brzegowego zostaną przedstawione w punkcie poświęconym symulacji numerycznej.

Aproksymacja różnicowa prawej strony równania energii

Typowym składnikiem równania energii jest wyrażenie $\frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$, przy czym wartości wykładnika $m = 0, 1, 2$ odpowiadają geometrii ścianki, walca i kuli (jeśli rozważany problem brzegowo-początkowy traktować jako zadanie 1D). Jednym z dokładniejszych sposobów aproksymacji pierwszej pochodnej jest tzw. iloraz różnicowy średni, który został wykorzystany do aproksymacji lewej strony równania energii.

Dla węzłów pomocniczych można przyjąć następujące przybliżenie:

$$\left(x^m \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+0,5} = x_{i+0,5}^m \lambda_{i+0,5} \frac{T_{i+1} - T_i}{h} = \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)^m \frac{T_1 - T_0}{R_{01}} \quad (10)$$

$$\left(x^m \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-0,5} = x_{i-0,5}^m \lambda_{i-0,5} \frac{T_i - T_{i-1}}{h} = \left(x_0 - \frac{h}{2} \right)^m \frac{T_0 - T_2}{R_{02}} \quad (11)$$

i dalej

$$\frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x^m \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{x_0^m} \frac{1}{h} \left[\left(x_0 + \frac{h}{2} \right)^m \frac{T_1 - T_0}{R_{01}} + \left(x_0 - \frac{h}{2} \right)^m \frac{T_2 - T_0}{R_{02}} \right] \quad (12)$$

Ostatecznie

$$\frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x^m \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i = \sum_{e=1}^2 \frac{T_e - T_0}{R_{0e}} \Phi_e \quad (13)$$

gdzie

$$\Phi_1 = \frac{1}{h} \left(\frac{x_0 + 0,5h}{x_0} \right)^m, \quad \Phi_2 = \frac{1}{h} \left(\frac{x_0 - 0,5h}{x_0} \right)^m \quad (14)$$

Dodatkowych wyjaśnień wymaga problem zdefiniowania średniej wartości współczynnika przewodzenia ciepła w węzłach pomocniczych. Aby w równaniach różnicowych pojawiły się tzw. opory cieplne (pojedynczym oporem jest iloraz grubości przez odpowiedni współczynnik przewodzenia, natomiast między węzłami obowiązuje prawo szeregowego łączenia oporów), współczynnik przewodzenia ciepła należy przyjąć w postaci średniej harmoniczej, a mianowicie:

$$\lambda_{i+0,5} = \frac{2\lambda_i \lambda_{i+1}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \quad (15)$$

$$\lambda_{i-0,5} = \frac{2\lambda_i \lambda_{i-1}}{\lambda_i + \lambda_{i-1}} \quad (16)$$

Dołączanie warunków brzegowych do zagadnienia stopowej warstwy kompozytowej na powierzchni formy

W metodzie różnic skończonych warunki brzegowe I rodzaju uwzględnia się w sposób „naturalny” - w odpowiednim równaniu różnicowym jedna z temperatur węzłów tworzących naroża gwiazdy jest znana.

Niżej zostaną omówione sposoby dołączania innych typów warunków brzegowych. Polepszenie dokładności aproksymacji różnicowej wymaga, aby węzły brzegowe nie leżały dokładnie na brzegu, a w odległości wynoszącej pół kroku siatki od brzegu. Taki podział różnicowy w przypadku rozważanego w niniejszej pracy zadania (obiekt 1D w układzie współrzędnych sferycznych) jest zawsze możliwy do realizacji. W pierwszej kolejności omówiony zostanie warunek dotyczący znajomości strumienia ciepła normalnego do brzegu. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że kierunek od węzła do brzegu pokrywa się z kierunkiem „1”. Można więc napisać

$$\left(x^m \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+0,5} = - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)^m q_0 \quad (17)$$

natomiast

$$\left(x^m \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-0,5} = \left(x_0 - \frac{h}{2} \right)^m \frac{T_0 - T_2}{R_{02}} \quad (18)$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \lambda x^m \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i &= \\ &= \frac{1}{x^m} \frac{1}{h} \left[- \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)^m q_0 + \left(x_0 - \frac{h}{2} \right)^m \frac{T_2 - T_0}{R_{02}} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

i ostatecznie

$$(\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T)_i = \sum_{e=1}^2 \frac{T_e - T_0}{R_{0e}} \Phi_e \Psi_e + \sum_{e=1}^2 q_{0e} \Phi_e (\Psi_e - 1) \quad (20)$$

gdzie $\Psi_e = 1$ dla węzła w kierunku do wnętrza obszaru oraz $\Psi_e = 0$ dla węzła w kierunku do brzegu z warunkiem II rodzaju.

Założmy z kolei, że na brzegu Γ założono warunek w postaci $-\lambda \cdot \operatorname{grad} T = \alpha(T - T^\infty)$. Z warunku brzegowego w punkcie $i+0,5$ mamy

$$\left(\lambda x^m \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+0,5} = \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)^m \alpha(T^\infty - T_\Gamma) \quad (21)$$

gdzie T_Γ jest temperaturą węzła pomocniczego ($i+0,5$). Pozostałe przekształcenia prowadzi się podobnie jak poprzednio i otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T)_i &= \\ &= \sum_{e=1}^2 \frac{T_e - T_0}{R_{0e}} \Phi_e \Psi_e + \sum_{e=1}^2 \alpha_e (T^\infty - T_{\Gamma e}) \Phi_e (1 - \Psi_e) \end{aligned} \quad (22)$$

W tym miejscu należy wykorzystać warunek ciągłości strumienia ciepła na brzegu, tzn.

$$\frac{T_0 - T_\Gamma}{R_0} = \frac{T_\Gamma - T^\infty}{R_\alpha}, \quad R_0 = \frac{h}{2\lambda_0}, \quad R_\alpha = \frac{1}{\alpha} \quad (23)$$

Z własności proporcji $a/b = c/d = (a+c)/(b+d)$ mamy

$$\frac{T_0 - T_\Gamma}{R_0} = \frac{T_\Gamma - T^\infty}{R_\alpha} = \frac{T_0 - T^\infty}{R_0 + R_\alpha} = \frac{T_0 - T^\infty}{\tilde{R}_{01}} \quad (24)$$

W ten sposób aproksymacja różnicowa dla węzłów z warunkami III rodzaju jest opisana równaniem

$$(\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T)_i = \sum_{e=1}^2 \frac{T_e - T_0}{R_{0e}} \Phi_e \Psi_e + \sum_{e=1}^2 \frac{T^\infty - T_0}{\tilde{R}_{0e}} \Phi_e (1 - \Psi_e) \quad (25)$$

Struktura powyższego równania jest bardzo podobna do aproksymacji różnicowej dla węzłów wewnętrznych. W przypadku warunku III rodzaju rolę jednej z temperatur wierzchołków gwiazdy przejmuje temperatura otoczenia, natomiast opór cieplny w tym kierunku jest sumą oporów przewodzenia i wnikania ciepła.

Na powierzchni kontaktu między odlewem i warstwą, warstwą i masą formierską zadany jest warunek

brzegowy IV rodzaju (w pracy założono warunki kontaktu idealnego).

Warunek ciągłości strumienia ciepła zapisuje się następująco:

$$-\left(\lambda_I \frac{\partial T_I}{\partial n}\right)_{i+0,5} = -\left(\lambda_{II} \frac{\partial T_{II}}{\partial n}\right)_{i+0,5} \quad (26)$$

przy czym warunki I i II identyfikują dwa różne podobszary, natomiast (w rozważanym zadaniu) kierunek n odpowiada kierunkowi x . Aproksymację różnicową warunku ciągłości przyjęto w postaci

$$-\frac{T_0 - T_\Gamma}{R_I} = -\frac{T_\Gamma - T_1}{R_{II}} = \frac{T_1 - T_0}{R_I + R_{II}} = \frac{T_1 - T_0}{R_{01}} \quad (27)$$

gdzie

$$R_{01} = \frac{h}{2\lambda_0} + \frac{h}{2\lambda_1} \quad (28)$$

jest oporem cieplnym określonym dokładnie tak samo jak dla węzłów wewnętrznych, natomiast λ_0 i λ_1 są współczynnikami przewodzenia dwóch różnych podobszarów. Tak więc

$$(\text{div } \lambda \text{ grad } T)_i = \sum_{e=1}^2 \frac{T_e - T_0}{R_{0e}} \Phi_e \quad (29)$$

i aproksymacja operatora $(\text{div } \lambda \text{ grad } T)_i$ jest formalnie rzecz biorąc taka sama jak dla węzłów wewnętrznych.

Równanie różnicowe aproksymujące równanie dyfuzji dla stanów nieustalonych (forma z wkładką kompozytującą)

Rozpatrzmy równanie różnicowe w postaci

$$c \rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \text{div}[\lambda \text{ grad } T(x, t)] \quad (30)$$

Lewą stronę tego równania można przybliżyć następująco:

$$\left(c \rho \frac{\partial T}{\partial t}\right)_0^f = c_0^f \rho_0^f \frac{T_0^{f+1} - T_0^f}{\Delta t} \quad (31)$$

gdzie c_0^f , ρ_0^f są ciepłem właściwym i gęstością masy w węźle centralnym w chwili, którą oznaczymy symbolem t^f , T_0^f , T_0^{f+1} - temperatury w węźle centralnym na początku i na końcu rozpatrywanego interwału czasu Δt .

Można w tym miejscu rozważać dwie możliwości:

1. Operator $\text{div}(\lambda \text{ grad } T)$ został napisany dla warstwy czasu t^f i wówczas

$$c_0^f \rho_0^f \frac{T_0^{f+1} - T_0^f}{\Delta t} = \sum_{e=1}^2 \frac{T_e^f - T_0^f}{R_{0e}} \Phi_e \quad (32)$$

skąd

$$T_0^{f+1} = T_0^f + \frac{\Delta t}{c_0^f \rho_0^f} \sum_{e=1}^2 \frac{T_e^f - T_0^f}{R_{0e}} \Phi_e \quad (33)$$

Oznaczając $\frac{\Delta t \Phi_e}{c_0^f \rho_0^f R_{0e}} = A_e$, otrzymujemy następująco

równanie różnicowe:

$$T_0^{f+1} = T_0^f + \sum_{e=1}^2 A_e (T_e^f - T_0^f) = \sum_{e=0}^2 A_e T_e^f \quad (34)$$

gdzie $A_0 = 1 - \sum_{e=1}^2 A_e$ (35)

Układ powyższych równań zapisany dla wszystkich węzłów rozważanego obszaru (z uwzględnieniem modyfikacji wynikających z warunków brzegowych) nazywany jest *jawnym schematem różnicowym*.

Pole temperatury dla $f = 0$ (tzn. $t = 0$) jest znane z warunku początkowego. Dla każdego węzła siatki można określić odpowiednie pojemności cieplne c_0^0 , gęstości masy ρ_0^0 i opory R_{0e}^0 . Tak więc wszystkie wielkości po prawej stronie równań różnicowych są dane i obliczenie temperatury dla kolejnej warstwy czasu, tzn. warstwy t^1 realizuje się natychmiastowo. Obliczone pole staje się warunkiem pseudopoczątkowym dla kolejnej pętli obliczeń.

Najpoważniejszą wadą schematów jawnych jest możliwość pojawienia się tzw. niestabilności metody różnicowej. Warunkiem, aby układ rozwiązujący prowadził do rozwiązania stabilnego, jest, aby wszystkie współczynniki liczbowe w równaniach różnicowych tworzących układ były nieujemne. Wynika stąd tzw. krytyczny interwał czasu, z jakim można realizować obliczenia numeryczne.

Ponieważ

$$A_0 = 1 - \sum_e A_e \quad (36)$$

jest jedynym współczynnikiem, który może być ujemny, więc on właśnie determinuje krytyczny, lokalny krok czasu. Otrzymuje się więc następująco kryterium stabilności:

$$\min_{\Omega} \left\{ 1 - \Delta t \sum_{e=1}^2 \frac{\Phi_e}{c_0^f \rho_0^f R_{0e}^f} \right\} \geq 0 \quad (37)$$

skąd

$$\Delta t \leq \min_{\Omega} \sum_{e=1}^2 \left[\frac{\Phi_e}{c_0^f \rho_0^f R_{0e}^f} \right]^{-1} \quad (38)$$

2. Operator $\text{div}(\lambda \text{ grad } T)$ może być także zapisany dla czasu t^{f+1} i wówczas

$$c_0^f \rho_0^f \frac{T_0^{f+1} - T_0^f}{\Delta t} = \sum_{e=1}^2 \frac{T_e^{f+1} - T_0^{f+1}}{R_{0e}^f} \Phi_e \quad (39)$$

Założono dodatkowo, że wielkości parametrów termofizycznych odpowiadają warstwie czasu t^f . Założenie to nie jest istotne w przypadku zadań liniowych, natomiast dla zadań nieliniowych w zasadzie powinno się przyjmować c , λ , ρ odpowiadające chwili t^{f+1} . W praktyce zakłada się jednak, że w interwale czasu Δt parametry termofizyczne węzła pozostają niezmiennicze.

Ostatnie równanie można zapisać w postaci

$$T_0^{f+1} = T_0^f + \sum_{e=1}^2 A_e T_e^{f+1} - T_0^{f+1} \sum_{e=1}^2 A_e \quad (40)$$

gdzie współczynniki A_e zdefiniowane są jak poprzednio. Inna postać równania różnicowego jest następująca:

$$T_0^{f+1} \left(1 + \sum_{e=1}^2 A_e \right) - \sum_{e=1}^2 A_e T_e^{f+1} = T_0^f \quad (41)$$

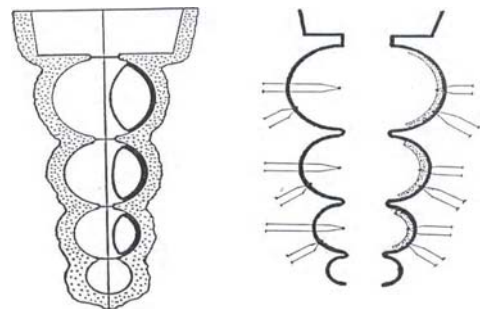
Z warunku początkowego (lub warunków pseudopoczątkowych) znane jest pole temperatury T_0^f w węzłach siatki pokrywającej obszar, natomiast T_e^{f+1} , $e = 0, 1, 2$ są wielkościami szukanymi. W związku z powyższym każde z równań różnicowych zawiera trzy niewiadome i przejście do kolejnego kroku czasu wymaga rozwiązania układu równań, w którym liczba niewiadomych odpowiada liczbie węzłów siatki. Takie podejście nazywa się *schematem niejawnym* i jego najważniejszą zaletą jest stabilność układu rozwiązującego.

REALIZACJA OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH PRZEPŁYWU CIEPŁA W CZASIE TWORZENIA POWIERZCHNIOWEJ WARSTWY KOMPOZYTOWEJ

Symulację procesów cieplnych zachodzących w układzie odlew kulisty-wkładka-masa formierska wykonano przy założeniu, że zadanie można traktować jako jednowymiarowe (kierunek przepływu ciepła odpowiada współrzędnej promieniowej). Wzdłuż promienia odlewu kulistego wyróżniono n węzłów (liczba n wprowadzana była jako jedna z danych wejściowych). Kolejne trzy węzły o numerach $n+1$, $n+2$, $n+3$ należały do obszaru warstwy, natomiast węzły o numerach $n+4$, ..., m do obszaru masy formierskiej. Liczba m była na tyle duża,

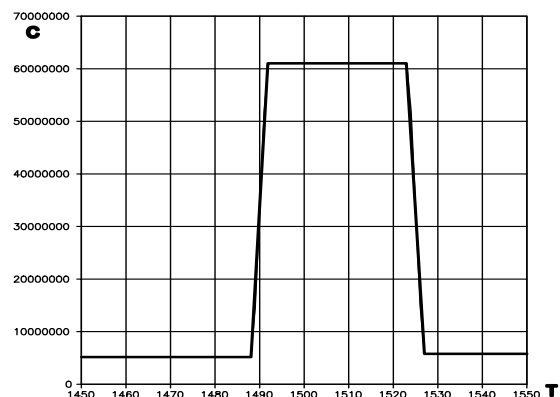
aby na zewnętrznej powierzchni formy można było przyjąć warunek adiabatywności.

Generacja siatki w podobszarach układu była realizowana automatycznie i lokalny krok siatki geometrycznej wynikał z rozważanego promienia kuli i grubości warstwy. Krok siatki w obszarze masy odpowiadał krokowi siatki w obszarze odlewu. Z kolei krok czasu był zadawany w zbiorze danych wejściowych, przy czym w programie wprowadzono instrukcje „zabezpieczające” stabilność schematu różnicowego i automatyczną zmianę kroku, jeśli krok czasu okazywał się za duży. Parametry termofizyczne podobszarów przyjęto jako stałe na podstawie dostępnych danych literaturowych. Zastępczą pojemność cieplną materiału odlewu i warstwy kompozytującej opisano zgodnie z hipotezą Wiejnika, z tym że dodatkowo zastosowano tzw. wygładzenie rzędu zerowego zapewniające różnowartościowość wygładzanej funkcji w rozpatrywanym interwale temperatury. Na rysunkach 3 i 4 pokazano przebiegi wygładzonych zastępczych pojemności cieplnych materiału odlewu i wkładki kompozytującej.



Rys. 2. Skorupowa forma doświadczalna

Fig. 2. Experimental form



Rys. 3. Zastępcza pojemność cieplna dla materiału odlewu

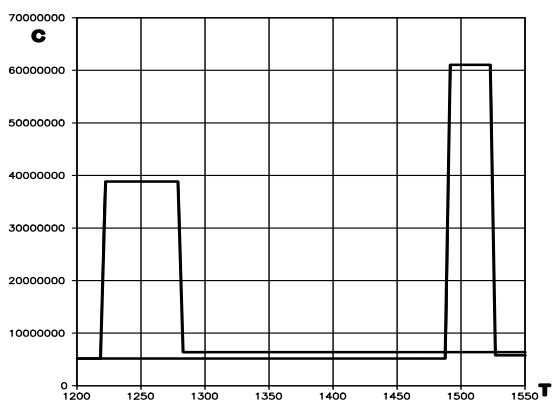
Fig. 3. Substitute heat capacity for cast material



Rys. 4. Zastępcza pojemność cieplna dla materiału warstwy kompozytującej

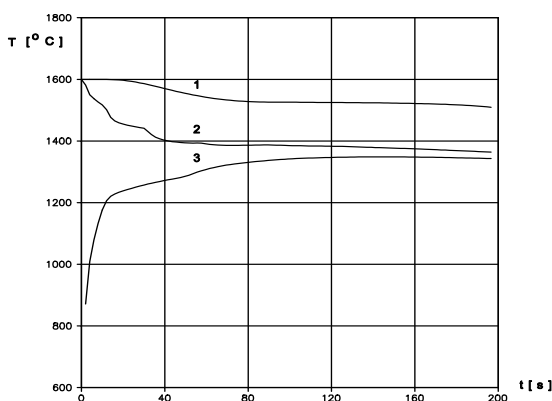
Fig. 4. Substitute heat capacity for composite layer material

Na rysunku 5 pokazano dla porównania przebiegi obu zastępczych pojemności cieplnych. Należy w tym miejscu podkreślić, że pojemności te odniesiono do jednostki objętości, tzn. odpowiadają one iloczynowi pojemności cieplnej i gęstości masy.



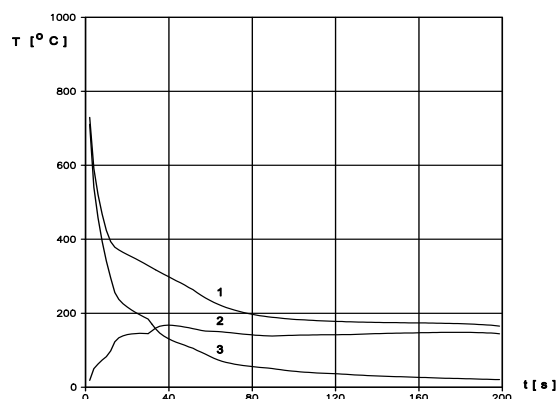
Rys. 5. Porównanie rozkładów zastępczych pojemności cieplnych

Fig. 5. Comparison of substitute heat capacity distributions



Rys. 6. Krzywe stygnięcia: 1 - środek kuli, 2 - wewnętrzna powierzchnia warstwy, 3 - zewnętrzna powierzchnia warstwy

Fig. 6. Self-cooling curves: 1 - sphere center, 2 - internal surface layer, 3 - external surface layer



Rys. 7. Zmiana temperatury: 1 - między środkiem kuli a wewnętrzną powierzchnią warstwy, 2 - w obszarze warstwy, 3 - między środkiem kuli a zewnętrzną powierzchnią warstwy

Fig. 7. Change of temperature: 1 - between sphere center and internal surface layer, 2 - in layer area, 3 - between sphere center and external surface layer

Opracowany program komputerowy (PASCAL 6.0) wykorzystano do wykonania łącznie 27 eksperymentów numerycznych. Uwzględniono trzy średnice odlewów kulistych (60, 80 i 100 mm), trzy grubości warstwy (2, 3 i 4 mm) oraz trzy temperatury zalewania (1550, 1600 i 1650°C). Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono wynik symulacji numerycznych dla kuli $\phi = 80$ mm, $g_w = 3$ mm, $T_{zal} = 1600^\circ\text{C}$.

PODSUMOWANIE

Analiza tworzenia się kompozytowej warstwy stopowej na odlewie staliwnym pozwoliła na określenie najistotniejszych zmiennych czynników procesu oraz na postawienie hipotezy, że wkładka stopowa kompozytująca powierzchnię odlewu, działając początkowo jako ochładzalnik zewnętrzny, zamraża ciekłą warstwę odlewu, która w dalszym procesie krystalizacji odlewu ulega ponownemu roztopieniu i po nagraniu warstwy kompozytującej następuje dyfuzja składników stopowych wkładki w głąb odlewu. Na podstawie wcześniejszych badań technologicznych stwierdzono, że przede wszystkim warunki cieplne krzepnięcia i stygnięcia odlewu oraz grubość wkładki decydują o jakości warstwy kompozytowej.

Przedstawiona matematyczna analiza procesu opisuje zmiany pola temperatur, kinetyki krzepnięcia odlewu i nagrzewania się kompozytowej wkładki stopowej. Dokładność tych obliczeń zweryfikowano bezpośrednimi pomiarami temperatur w czasie realizacji eksperymentu rzeczywistego. Wysoka stabilność obliczeń, wg opracowanego programu, świadczy o poprawnie przyjętych założeniach modelu przepływu ciepła w układzie odlew-wkładka kompozytowa-forma i właściwie dobranych parametrach termofizycznych.

Badania teoretyczne modelowe potwierdziły tezę o powstawaniu stopowych warstw kompozytowych

(Fe-Cr-C) ze stanu ciekłego, a nie poprzez infiltrację składników warstwy stopowej przez ciekłe staliwo.

LITERATURA

- [1] Gawroński J., Wróbel P., Szajnar J., Powierzchniowe warstwy kompozytowe, Seminarium Kompozyty i ich wykorzystanie w technice, Katowice 1996.
- [2] Gawroński J., Cholewa M., Wróbel P., Composite alloy layer on the steel cast, II International Conference Engineering and Functional Materials, Lviv 1997.
- [3] Gawroński J., Szajnar J., Wróbel P., Przemysłowe metody wykonywania stopowych warstw kompozytowych na odlewach stalowych, Tendencje rozwojowe w procesach produkcyjnych, Zielona Góra 1997.
- [4] Gawroński J., Ignaszak Z., Wróbel P., Formation of Composite Alloy Layers on Surfaces of the Cast Carbon Steel, Materials Science (Medziagotyra) 2002, 8, 2.
- [5] Mochnacki B., Suchy J.S., Numerical methods in computations of foundry processes, Kraków 1995.
- [6] Majchrzak E., Mochnacki B., Metody numeryczne, podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy, Gliwice 1996.

Recenzent
Zbigniew Górny