

Natalia Rylko¹

Akademia Pedagogiczna im. KEN, Instytut Techniki, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków

OBLICZANIE EFEKTYWNEJ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH W PRZYPADKU NIEUSTALONEGO PRZEPEŁYWU CIEPŁA

Rozważano nieustalony przepływ ciepła materiału kompozytowego z jednokierunkowo ułożonymi włóknami o przewodności cieplnej λ_1 w osnowie o przewodności cieplnej λ_2 . Rozpatrywany materiał kompozytowy jest przedstawiony w postaci jednostkowej komórki reprezentatywnej. Lokalnie temperatura spełnia równanie przewodnictwa cieplnego. Kontakt doskonały włókno-osnowa opisano za pomocą warunków sprzężenia na brzegu włókna. W celu określenia makroskopowej przewodności λ_e przeprowadzono uśrednienie prawa Fouriera w komórce jednostkowej. Szczególną uwagę poświęcono przypadkowi, gdy zewnętrzny strumień cieplny zmienia się w czasie zgodnie z funkcją wykładniczą. Wówczas rozpatrywane zagadnienie sprowadza się do zagadnienia brzegowego dla równania Helmholtza, które rozwiązano dla kompozytów słabo niejednorodnych, czyli dla wystarczająco małych $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Po rozwiązaniu otrzymano analityczny wzór na λ_e , odpowiadający klasycznemu wzorowi Clausiusa-Mossottiego dla procesów stacjonarnych. Otrzymany wynik pokazuje, że efektywna przewodność kompozytów w przypadku niestacjonarnym zależy od historii procesu.

Słowa kluczowe: niestacjonarny przepływ ciepła, materiał włóknisty, efektywna przewodność

CALCULATION OF THE EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY OF FIBER COMPOSITES IN NON-STATIONARY CASE

Unsteady heat conduction of the unidirectional fibers of conductivity λ_1 embedded in a host material of conductivity λ_2 is discussed when the considered composite is represented by a unit-periodicity cell. First, the local temperature field in the unit cell is modeled by the heat equation. The perfect contact between different materials is described by conjugation conditions on the boundary of the fibers. In order to determine the macroscopic conductivity λ_e of the composite we perform the spatial average of the Fourier law over the unit cell. Special attention is paid to the case when the given external flux obeys the decreasing exponential law in time. Then the problem is reduced to a boundary value problem for the Helmholtz equation. The latter problem is solved for weakly inhomogeneous composites, i.e. $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$ is sufficiently small. As a result an analytical formula for λ_e is obtained. It corresponds to the classical Clausius-Mossotti approximation for the steady heat conduction. The obtained result implies that the effective conductivity of composites in unsteady case depends on time. This dependence is explicitly written in the considered case.

Key words: unsteady heat conduction, fiber material, effective conductivity

WPROWADZENIE

Obliczenie makroskopowych efektywnych właściwości materiałów kompozytowych w przypadku niestacjonarnego przepływu ciepła jest zadaniem skomplikowanym [1]. Pierwszym krokiem w rozwiązaniu tego zadania jest obliczenie efektywnych właściwości komórki reprezentatywnej. Takie podejście jest uzasadnione teorią [1-4], zgodnie z którą możliwe jest uogólnienie otrzymanych wyników na właściwości materiału kompozytowego w całości, jeżeli możliwe jest sprowadzenie równań parabolicznych do eliptycznych [5, 6]. Właśnie taki przypadek będzie przedmiotem naszych badań.

Rozpatrzmy elementarną komórkę kwadratową Q , utworzoną z materiału o przewodności cieplnej λ_2 , ciepłe właściwym c_2 oraz gęstości ρ_2 , zawierającą wtrącenie z innego materiału o przewodności cieplnej λ_1

(w stosunku do przewodności cieplnej osnowy), o ciepłe właściwym c_1 oraz gęstości ρ_1 . Niech pierwszy materiał zajmuje w komórce podstawowej obszar D_2 , drugi, odpowiednio, D_1 . Na razie kształt wtrącenia D_1 może być dowolny. Niech v oznacza udział objętościowy wtrącenia (pole powierzchni w ujęciu dwuwymiarowym), wówczas $1-v$ jest udziałem objętościowym osnowy. Wewnątrz komórki występuje przepływ ciepła, lokalnie określony równaniem [6]

$$q = -\lambda \nabla T \quad (1)$$

gdzie we wtrąceniu $\lambda = \lambda_1$, w osnowie $\lambda = \lambda_2$. Równość (1) wyraża prawo Fouriera, które jest słuszne także dla niestacjonarnego przepływu ciepła. W przypadku nie-

¹ mgr

stacjonarnym rozbieżność (dywergencja) gęstości strumienia ciepła wyraża się wzorem [6]

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

gdzie t oznacza czas, funkcje ρ i c przyjmują wartości ρ_1, c_1 i ρ_2, c_2 w obszarach D_1 i D_2 , odpowiednio. Jeśli podstawimy (1) do (2), to otrzymamy lokalne równanie przewodnictwa cieplnego [6]

$$-\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (-\lambda \nabla T)$$

które zapiszemy w postaci [6]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \quad (3)$$

gdzie $a = a_1 = \lambda_1 / (\rho_1 c_1)$ w obszarze D_1 i $a = a_2 = \lambda_2 / (\rho_2 c_2)$ w obszarze D_2 . Wielkość a nazywa się współczynnikiem wyrównania temperatury lub dyfuzyjnością cieplną [6].

Warunki kontaktu doskonałego na L w przypadku nieustalonego przepływu ciepła mają postać [2-5]:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie L jest brzegiem obszaru D_1 , T_1 jest rozkładem temperatury w obszarze D_1 , T_2 - w obszarze D_2 . Wprowadzamy warunki brzegowe na kwadratowej komórce Q o jednostkowym polu powierzchni:

$$\begin{aligned} T(x+1, y, t) &= T(x, y, t) + G(t) \\ T(x, y+1, t) &= T(x, y, t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x+1, y, t) &= \frac{\partial T}{\partial x}(x, y, t) \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, y+1, t) &= \frac{\partial T}{\partial y}(x, y, t) \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $G(t)$ to znany przyrost temperatury na komórce.

W celu poprawnego sformułowania zagadnienia należy wziąć pod uwagę warunki początkowe, czyli rozkład temperatury w czasie zerowym

$$T_1(x, y, 0) = f(x, y), \quad T_2(x, y, 0) = f(x, y) \quad (7)$$

Rozwiązanie problemu polega na znalezieniu efektywnych właściwości poprzez uśrednienie zależności (1) i (2) w komórce reprezentatywnej. Zaczniemy od równania (1). Wprowadźmy operację uśrednienia na drodze

całkowania po komórce $\langle \cdot \rangle = \iint_Q \cdot dx dy$. Wybór kierunku obliczania λ_e dla materiałów makroskopowo izotropowych może być dowolny, wybierzmy zatem kierunek OX . Wówczas współczynnik efektywnej przewodności cieplnej λ_e dla materiałów makroskopowo izotropowych określa się wzorem [6]

$$\langle q_x \rangle = -\lambda_e \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle \quad (8)$$

gdzie q_x jest współrzędną wektora \mathbf{q} na osi OX . Zauważmy ponadto, że uśrednienie zależności (8) przebiega według zmiennych przestrzennych, a nie według czasu t , tak więc współczynnik λ_e może być zależny od czasu.

Uśrednienie zależności (2) sprowadza się do równości

$$\langle \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} \rangle = (\rho c)_e \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t}$$

w której efektywna wielkość $(\rho c)_e$ ma postać

$$(\rho c)_e = \rho_1 c_1 v + \rho_2 c_2 (1-v) \quad (9)$$

Można sprawdzić, że równowaga procesu przepływu ciepła ma miejsce, jeżeli w komórce ogólna ilość ciepła nie zmienia się w czasie, tzn.

$$\rho_1 c_1 \iint_{D_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} dx dy + \rho_2 c_2 \iint_{D_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} dx dy = 0 \quad (10)$$

PRZEPLÝW CIEPŁA Z WYKŁADNICZYM SPADKIEM TEMPERATURY W CZASIE

Rozpatrzmy przypadek, gdy strumień ciepła zmienia się w czasie zgodnie z zależnością e^{-kt} , co odpowiada ochłodzeniu materiału. W tej sytuacji zagadnienie sprowadza się do równania typu eliptycznego, a, jak omawialiśmy wcześniej [5], makroskopowy rozkład temperatury w całym materiale kompozytowym może być odtworzony poprzez homogenizowaną temperaturę w komórce, w następstwie czego efektywne właściwości komórki reprezentatywnej i materiału w całości są takie same.

Przy badaniu procesów nieustalonego przepływu ciepła wpływ początkowego rozkładu temperatury w rozważanym momencie jest znikomy, jeśli jest on wystarczająco oddalony w czasie od początkowego. W tym przypadku możemy rozpatrywać zagadnienie bez warunków początkowych (5).

Rozpatrzmy proces ochłodzenia materiału, gdy rozkład temperatury zmienia się w czasie w następujący sposób:

$$T_1(x, y, t) = u_1(x, y) \exp(-kt)$$

$$T_2(x, y, t) = u_2(x, y) \exp(-kt)$$

gdzie $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ jest poszukiwanym rozkładem temperatury w czasie $t = 0$. Funkcje te spełniają równania Helmholtza:

$$\nabla^2 u_1 + \omega_1^2 u_1 = 0 \quad \text{w obszarze } D_1 \quad (11)$$

$$\nabla^2 u_2 + \omega_2^2 u_2 = 0 \quad \text{w obszarze } D_2$$

gdzie: $\omega_1^2 = k/a_1$, $\omega_2^2 = k/a_2$. Warunek kontaktu doskonałego (4) przyjmuje postać

$$u_1 = u_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{na } L \quad (12)$$

Niech przyrost temperatury $G(t) = \exp(-kt)$, wówczas warunek periodyczności (5) dla $u = u_1$ lub $u = u_2$ zapisuje się w formie:

$$\begin{aligned} u(x+1, y) &= u(x, y) + 1 \\ u(x, y+1) &= u(x, y) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x+1, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y+1) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{aligned} \quad (14)$$

Zbadajmy, w jaki sposób można obliczyć efektywną przewodność cieplną λ_e , określoną za pomocą wzoru (8). Obliczmy wielkość E o charakterze energetycznym, określoną przez wzór [5]

$$-E = - \iint_Q q_x dx dy = \iint_{D_1} \lambda_e \frac{\partial T_1}{\partial x} dx dy + \iint_{D_2} \lambda_e \frac{\partial T_2}{\partial x} dx dy$$

Przekształćmy prawą część ostatniego wyrazu na podstawie wzoru Greena i pierwszego warunku (5)

$$-E = \lambda_e \int_{-1/2}^{1/2} [T_2]_x dy = \lambda_e \exp(-kt) \quad (15)$$

Obliczmy tę samą wielkość w inny sposób

$$\begin{aligned} -E &= \lambda_1 \iint_{D_1} \frac{\partial T_1}{\partial x} dx dy + \lambda_2 \iint_{D_2} \frac{\partial T_2}{\partial x} dx dy = \\ &= \lambda_2 \exp(-kt) + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_L T_1 dy \end{aligned} \quad (16)$$

Z porównania (15) i (16) otrzymamy wzór na efektywną przewodność cieplną

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \lambda_2 + \exp(kt)(\lambda_1 - \lambda_2) \int_L T_1 dy = \\ &= \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \iint_{D_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} dx dy \end{aligned} \quad (17)$$

Uzyskano wzór na obliczenie λ_e , w którym występuje wyłącznie poszukiwana funkcja u_1 , która wyraża zerowy rozkład temperatury we wtrąceniu.

Zajmiemy się szczególnym przypadkiem rozpatrywanego zagadnienia, kiedy to wtrącenia mają kształt koła. Po rozwiązaniu zagadnienia (10)-(14) możemy obliczyć λ_e ze wzoru (17). Załóżmy, że materiał kompozytowy jest słabo niejednorodny. To oznacza, że różnice $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$ i $\delta = k(\rho_1 c_1 / \lambda_1 - \rho_2 c_2 / \lambda_2) = \omega_1^2 - \omega_2^2$ są wystarczająco małe. Wprowadzone założenia w odniesieniu do parametrów zagadnienia pozwolą otrzymać rozwiązanie w postaci analitycznej. Przeprowadźmy obliczenia, pomijając wielkości rzędu $O(\Delta)$ i $O(\delta)$. Przedstawmy rozwiązanie zagadnienia (11)-(14) - funkcję $u_1(x, y)$ - w postaci szeregu względem δ

$$u_1(x, y) = u_1^{(0)}(x, y) + \delta u_1^{(1)}(x, y) + \delta^2 u_1^{(2)}(x, y) \dots$$

Podstawiając ten szereg do pierwszego równania (11) i przyrównując współczynniki przy jednakowych potęgach δ , otrzymujemy ciąg kolejnych równań:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1^{(0)} + \omega_2^2 u_1^{(0)} &= 0 \\ \nabla^2 u_1^{(1)} + \omega_2^2 u_1^{(1)} &= -u_1^{(0)} \\ \nabla^2 u_1^{(2)} + \omega_2^2 u_1^{(2)} &= -u_1^{(1)} \\ &\dots \end{aligned} \quad (18)$$

spełnionych w obszarze D_1 . W układzie równań (18) najpierw rozwiązujemy zerowe równanie na $u_1^{(0)}$, uwzględniając przy tym warunki sprzężenia i periodyczności, potem, podstawiając $u_1^{(0)}$ do następnego równania, wyznaczamy $u_1^{(1)}$ itd.

W zerowym przybliżeniu rozwiązaniem zagadnienia (11)-(14) będzie funkcja

$$u_1^{(0)}(x, y) = \sin(\omega_2 x) / 2 \sin(\omega_2 / 2) \quad (19)$$

Funkcja (19) spełnia pierwsze równanie (18) oraz warunki (13) i (14). Warunki sprzężenia (12) również są spełnione z dokładnością $O(\lambda_1 - \lambda_2)$, ponieważ w zerowym przybliżeniu $u_2(x, y) = \sin(\omega_2 x) / (2 \sin(\omega_2 / 2)) + O(\lambda_1 - \lambda_2)$ w obszarze D_2 i

$$\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\partial u_2}{\partial n} + \lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} = \lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} + O(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{na } L$$

stąd

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n} + O((\lambda_1 - \lambda_2) / \lambda_1) \text{ na } L$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej [7] dla równania Helmholtza, w rozpatrywanym przypadku przestżeni dwuwymiarowej mamy

$$\frac{1}{\pi r_0^2} \iint_{D_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) dx dy = \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, 0) J_0(r_0 \omega_2) \quad (20)$$

gdzie r_0 jest promieniem wtrącenia D_1 , J_0 - funkcją Bessela rzędu 0. Zauważmy, że funkcja $\partial u_1 / \partial x$, tak samo jak i funkcja u_1 , spełnia pierwsze równanie Helmholtza (11). Rozpatrmy zerowe przybliżenie (19). Wówczas obliczając całkę (20) poprzez $u_1^{(0)}(0, 0)$, z (17) uzyskujemy wzór, który można zapisać w postaci wzoru Clausiusa-Mossottiego

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_2} = \frac{1 + v \Delta J_0(r_0 \omega_2) \omega_2 / (2 \sin(\omega_2 / 2))}{1 - v \Delta J_0(r_0 \omega_2) \omega_2 / (2 \sin(\omega_2 / 2))} + O(\Delta^2) \quad (21)$$

gdzie $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2) / (\lambda_1 + \lambda_2)$ - parametr kontrastu, v - koncentracja.

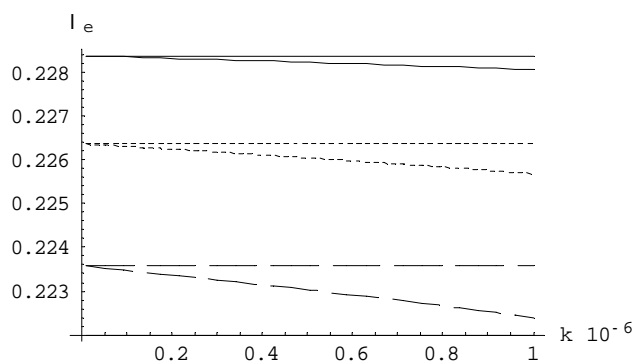
Dla sprawdzenia zależności (21) rozpatrzmy przypadki procesu stacjonarnego, gdy $k = 0$, wówczas $\omega_2 = 0$. Obliczając granicę $\omega_2 \rightarrow 0$ w (21), uzyskujemy klasyczny wzór Clausiusa-Mossottiego [5]

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_2} \approx \frac{1 + v \Delta}{1 - v \Delta} \quad (22)$$

Otrzymaną zależność (21) zastosujemy do opisanie procesu ochłodzenia materiału kompozytowego, utworzonego z włókien szklanych, wtopionych w osnowę z żywicy epoksydowej. Właściwości materiału podano w tabeli 1.

TABELA 1. Wybrane właściwości kompozytu
TABLE 1. Given properties of the composite

Parametry	Żywica epoksydowa	Włókna szklane
gęstość, kg/m ³	1150	2500
ciepło właściwe, J/kg K	824	840
przewodność cieplna, W/m K	0,22±0,24	0,04



Rys. 1. Zależność współczynnika efektywnej przewodności cieplnej od historii procesu (współczynnika ochłodzenia k). Linia przerywana odpowiada wartości $r = 0,08$, kropkowana - $r = 0,06$, ciągła - $r = 0,04$

Fig. 1. Dependence of the effective thermal conductivity on history of the process (coefficient of cooling). Broken line corresponds to the value $r = 0.08$, dot line - to $r = 0.06$, solid line - to $r = 0.04$

Rozpatrmy proces ochłodzenia charakteryzujący się współczynnikiem $k = 10^{-7} \div 10^{-6}$. Odpowiada to spadkowi temperatury rzędu 3°, osiąganym w czasie od 3 do 24 godzin w zależności od k . Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 1, gdzie linie poziome odpowiadają procesom stacjonarnym. Na wykresie widać różnicę wartości współczynnika efektywnej przewodności ciepła dla procesów niestacjonarnych w porównaniu do stacjonarnego. Różnice te rosną wraz ze wzrostem współczynnika k oraz promienia wtrąceń, co wyraża pośrednią zależność współczynnika efektywnej przewodności ciepła od czasu.

PODSUMOWANIE

W artykule za pomocą metody analizy asymptotycznej wyprowadzono wzór (17) na efektywną przewodność cieplną materiałów włóknistych w przypadku ochłodzenia z wykładniczym spadkiem temperatury w czasie. Na podstawie (17) otrzymano uogólnienie przybliżonego wzoru Clausiusa-Mossottiego (21) dla włókien o przekroju kołowym. Porównamy (21) z klasycznym wzorem Clausiusa-Mossottiego (22). W obydwóch występują wielkości $v \Delta$, możemy więc rozszerzyć zastosowanie wzoru (21) na przypadek dowolnych Δ i małych koncentracji wtrąceń v . Jeżeli współczynnik k jest mały (proces ochłodzenia jest powolny), to $\delta = k(\rho_1 c_1 / \lambda_1 - \rho_2 c_2 / \lambda_2)$ jest małe, wobec czego wzór (21) jest słuszny w przypadku procesów wolnego ochłodzenia (małość k) dla materiałów słabo niejednorodnych lub dla małych koncentracji wtrąceń (małość $v \Delta$).

Obok wzorów Furmańskiego [2-4] jest to kolejny wzór analityczny pozwalający na obliczenie efektywnej przewodności cieplnej λ_e dla procesów niestacjonarnych.

LITERATURA

- [1] Buyevich Yu.A., Ustinov V.A., Effective conductivity of a macroscopically inhomogeneous dispersion, *Int. J. Heat Mass Transfer* 1995, 38, 381-389.
- [2] Furmanski P., Heat Conduction in Composites: Homogenization and Macroscopic Behavior, *Appl. Mech. Rev.* 1997, 50, 11, 2993-3002.
- [3] Furmanski P., Effective macroscopic description for heat conduction in heterogeneous materials, *Int. J. Heat Mass Transfer* 1992, 35, 6, 327-356.
- [4] Furmanski P., A mixture theory for heat conduction in heterogeneous materials, *Int. J. Heat Mass Transfer* 1994, 37, 18, 327-356.
- [5] Jikov V.V., Kozlov S.M., Olejnik O.A., *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, Berlin 1994.
- [6] Tikhonov A.N., Samarskij A.A., *Uravnenija matematicheskoj fiziki*, Nauka, Moskva 1980.
- [7] Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics*, vol. 2, Interscience, 1962.

Recenzent
Zbigniew Konopka