

Marcin Kamiński<sup>1</sup>

Politechnika Łódzka, Katedra Mechaniki Materiałów, al. Politechniki 6, 93-590 Łódź

## ANALIZA WRAŻLIWOŚCI EFEKTYWNYCH WŁASNOŚCI TERMOMECHANICZNYCH PERIODYCZNYCH KOMPOZYTÓW WIELOSKŁADNIKOWYCH Z DEFEKTAMI

Zasadniczym celem niniejszego artykułu jest pokazanie metody wyznaczania gradientów wrażliwości wybranych efektywnych parametrów materiałowych kompozytów wieloskładnikowych. Zagadnienie to jest analizowane z punktu widzenia własności termomechanicznych kompozytów o dowolnej liczbie składników w komórce periodyczności, a także kompozytów włóknistych z defektami strukturalnymi pomiędzy włóknem a matrycą. Defekty te są modelowane jako półeliptyczne leżące dłuższymi półosiami na brzegu włókno-matryca. Zastosowane metody homogenizacji są oparte na rozwiązaniu problemu komórkowego za pomocą metody elementów skończonych (MES) w przypadku homogenizowanego tensora sprężystości. Gradienty wrażliwości są wyznaczone numerycznie dla czteroskładnikowego periodycznego kompozytu nadprzewodzącego za pomocą programu MES do rozwiązywania zagadnienia homogenizacji. Jednocześnie efektywne własności materiałowe interfazy, współczynniki przewodnictwa i pojemności cieplnej, a także ograniczenia górne i dolne efektywnego tensora sprężystości są obliczane symbolicznie za pomocą programu MAPLE. Gradienty efektywnego modułu Younga i współczynnika Poissona dla interfazy względem współczynnika spłaszczenia defektów między włóknem a matrycą i liczby defektów na interfejsie, a także gradienty współczynnika przewodnictwa i pojemności cieplnej w odniesieniu do współczynnika spłaszczenia oraz odpowiednich współczynników dla defektów ilustrują możliwości obliczeniowe skonstruowanego modelu kompozytu. Zastosowana metodologia może być wykorzystana do wyznaczania gradientów wrażliwości w odniesieniu do innych parametrów projektowych, dla innych pól fizycznych oraz może być połączona w dalszej kolejności z programami MES do analizy strukturalnej lub termomechanicznej kompozytów.

Słowa kluczowe: metoda homogenizacji, defekty międzyskładnikowe, analiza wrażliwości, metoda elementów skończonych

## SENSITIVITY ANALYSIS OF EFFECTIVE THERMOMECHANICAL PROPERTIES FOR PERIODIC MULTICOMPONENT COMPOSITES WITH INTERFACE DEFECTS

The main objective of this paper is to demonstrate the method of sensitivity gradients determination for the effective material parameters for the periodic multicomponent composites. This issue is analyzed from the point of view of thermomechanical properties with any finite number of the components in the periodicity cell and for fiber-reinforced composites with interface defects also (see Fig. 1). These defects are modeled as semi-elliptical regions lying with major axes on the fiber-matrix boundary. The homogenization method applied are based on the solution for the cell problem with the aid of the Finite Element Method (FEM) to compute the homogenized elasticity tensor. The sensitivity gradients for the periodic superconducting composite with four components are determined using the homogenization-oriented FEM program MCCEFF (Fig. 3). On the other hand, the effective material parameters for the interphase, the heat conductivity and heat capacity coefficients as well as upper and lower bounds for the effective elasticity tensor are computed symbolically thanks to the system MAPLE. Using this methodology the effective Young modulus and Poisson ratio for the interphase with respect to flatness coefficients of the defects and with respect to the defects number on the interface are computed (Figs 2-5). At the same time, the relevant gradients of the homogenized heat conduction and capacity coefficients with respect to the defects flatness and these coefficients for the defects in Figures 7-10 illustrate the opportunities of this model. The applied methodology may be successfully used for numerical determination of the sensitivity gradients with respect to the other design parameters, for various physical fields applied to composites and can be used further in conjunction with various FEM programs for structural and/or thermomechanical analysis of composites.

Key words: homogenization method, interface defects, sensitivity analysis, Finite Element Method

## WPROWADZENIE

Jak wiadomo, analiza wrażliwości materiałów kompozytowych może być wykorzystywana do optymalizacji struktur wieloskładnikowych zarówno w przypadku struktur o periodycznym, jak i dowolnym rozkładzie zbrojenia lub rozkładzie materiałów składowych [1, 3, 5]. Analiza taka może być przeprowadzana, podobnie jak w przypadku struktur jednorodnych, poprzez przyje-

cie wybranych parametrów geometrycznych lub materiałowych składników kompozytu jako parametrów projektowych i wyznaczenie gradientów wrażliwości za pomocą odpowiedniego programu komputerowego. Alternatywna metoda polega na wykorzystaniu metody homogenizacji, która, po odpowiednich modyfikacjach,

<sup>1</sup> dr inż.

umożliwia znalezienie współczynników wrażliwości własności efektywnych kompozytu w odniesieniu do parametrów projektowych materiałów składowych. Modelowanie całej struktury kompozytu przeprowadza się przy założeniu, że jest ona jednorodna i ma własności efektywne obliczone uprzednio.

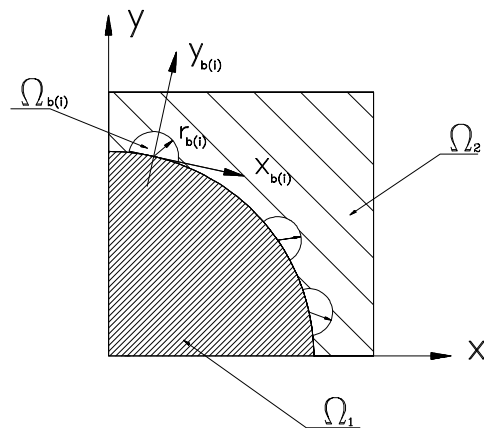
Celem niniejszego artykułu jest wyznaczenie i analiza gradientów wrażliwości efektywnych własności kompozytów wieloskładnikowych z uwzględnieniem defektów na brzegach pomiędzy składnikami, a także przy założeniu idealnych połączeń poszczególnych składników. Zaproponowany w pracy model matematyczno-numeryczny stanowi rozszerzenie analizy wrażliwości kompozytów dwuskładnikowych przeprowadzonej w pracy [5] na kompozyty o dowolnej liczbie składników w komórce periodyczności. Zasadniczym nowym elementem zaproponowanej w niniejszej pracy analizy wrażliwości jest potraktowanie ilości, a także współczynnika spłaszczenia defektów na interfejsie jako zmiennych projektowych, względem których wyznacza się odpowiednie gradienty wrażliwości efektywnych własności termomechanicznych interfejsu [4].

Do wyznaczenia współczynników wrażliwości wykorzystuje się program komputerowy MCCEFF oparty na metodzie elementów skończonych (MES), w którym odpowiednie pochodne cząstkowe względem parametrów projektowych kompozytu są wyznaczone w sposób przyrostowy. Jednocześnie pokazane są algebraiczne zależności opisujące efektywne związki konstytutywne dla interfejsu zawierającego defekty międzyfazowe na brzegu włókno-matryca oraz efektywne współczynniki przewodnictwa i pojemności cieplnej. Opisane własności efektywne, jak też ich odpowiednie gradienty są wyznaczone symbolicznie za pomocą programu MAPLE, który dodatkowo umożliwia parametryczne przedstawienie gradientów wrażliwości i ich dalszą dyskusję.

## MODEL KOMPOZYTU PERIODYCZNEGO Z DEFEKTAMI

Rozważmy przekrój poprzeczny kompozytu wieloskładnikowego w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku włókien; szczególnym przypadkiem tego ogólnego zadania jest kompozyt zbrojony równoległymi długimi włóknami. Własności termosprężyste tego kompozytu są zdefiniowane jednoznacznie dla poszczególnych składników, natomiast na brzegu pomiędzy składnikami występują półeliptyczne defekty strukturalne, których główna oś 'a' należy do odpowiedniego interfejsu, natomiast 'b' jest do niego prostopadła. Defekty te są traktowane jako nieodkształcalne w trakcie analizy, a ich własności termiczne odpowiadają współczynnikowi przewodnictwa i pojemności cieplnej powietrza w temperaturze pokojowej. Rysunek 1 przedstawia

szczególny przypadek ćwiartki komórki periodyczności takiego kompozytu, w którym półosie defektów są sobie równe i defekty mają kształt półkolisty.



Rys. 1. Kompozyt z defektami na interfejsie  
Fig. 1. Composite with the interface defects

Alternatywne podejście jest przedstawione w pracy [12], gdzie wprowadzony jest jednowymiarowy model interfejsu w kierunku prostopadłym do interfejsu, a zmienność własności mechanicznych i własności efektywne są modelowane za pomocą różnych funkcji algebraicznych. W dalszym ciągu zakłada się, że składniki kompozytu są liniowo-sprężyste oraz poprzecznie izotropowe, a więc związek konstytutywny dla n-tego składnika można zapisać jako [8]

$$\sigma_{ij} = 2 \frac{e_n}{(1 + \nu_n)} \times \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{1}{1 - 2\nu_n} (\nu_n \varepsilon_{kk} - (1 + \nu_n) \alpha_n T) \delta_{ij} \right\} \quad (1)$$

gdzie  $e_n$ ,  $\nu_n$  oraz  $\alpha_n$  oznaczają odpowiednio moduł Younga, współczynnik Poissona oraz współczynnik rozszerzalności cieplnej odpowiedniego materiału składowego. W dalszej analizie ważną rolę pełni interfejs, czyli cienka warstwa zawierająca wszystkie defekty międzyskładnikowe, która oddziela dwa materiały składowe kompozytu wzdłuż brzegu, na którym występują te defekty. Związek konstytutywny interfejsu przyjmuje się jak dla materiału o losowo rozłożonych eliptycznych otworach [9, 11]. Całkowite odkształcenie ośrodka zawierającego defekty pod naprężeniem  $\sigma$  dla takiego ośrodka jest równe

$$\varepsilon = \mathbf{c}^0 : \sigma + \Delta \varepsilon \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{c}^0$  jest tensorem podatności materiału bez defektów. Odkształcenie od wprowadzenia defektu do jednorodnego materiału wynosi

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{u}) d(\partial\Omega) \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  oraz  $\mathbf{n}$  oznaczają przemieszczenie brzegu defektu  $\partial\Omega$  oraz wektor normalny do tego brzegu (skierowany do wewnątrz defektu). Potencjał sprężysty  $f(\boldsymbol{\sigma})$  dla ośrodka z defektami jest równy [11]

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{c}^0 : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} = f_0(\boldsymbol{\sigma}) + \Delta f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4)$$

gdzie

$$f_0(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E_0} \left( (1 + \nu_0) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \nu_0 (\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))^2 \right) \quad (5)$$

a tensor  $\mathbf{H}$  jest tensorem podatności. Dla pojedynczego defektu poddanego działaniu siły  $P$  pod kątem  $\alpha$  otrzymujemy

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_{11} = \frac{P\pi b}{AE_0} (b + (a+b) \cos 2\alpha) \\ \Delta \varepsilon_{22} = \frac{P\pi a}{AE_0} (a - (a+b) \cos 2\alpha) \\ \Delta \varepsilon_{12} = \frac{P\pi}{2AE_0} (a+b)^2 \sin 2\alpha \end{cases} \quad (6)$$

dla  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  będących wektorami normalnymi do osi elipsy  $2b$ ,  $2a$  (oś  $x_1$  jest prostopadła do interfejsu). Wielkość  $E_0$  oznacza tutaj moduł sprężystości materiału bez defektów, natomiast  $A$  miarę obszaru, na którym dokonuje się uśredniania własności mechanicznych próbki. Pierwsze dwa składniki oznaczają podatności defektu odpowiadające kierunkom  $\mathbf{m}$  i  $\mathbf{n}$ , trzeci składnik - podatności w kierunku stycznym, natomiast czwarty odpowiada efektowi współczynnika Poissona. Mamy [12]

$$\begin{aligned} \Delta f(\boldsymbol{\sigma}) &= \\ &= \frac{1}{2E_0} \left( p \left[ 4 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))^2 \right] + 2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\beta} - p\mathbf{I}) \right) \quad (7) \end{aligned}$$

gdzie

$$p = \frac{\pi}{A} \sum_k (ab)^{(k)} \quad (8)$$

jest współczynnikiem porowatości ośrodka, natomiast parametr

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\pi}{A} \sum_k (a^2 \mathbf{nn} + b^2 \mathbf{mm})^{(k)} \quad (9)$$

jest tensorem gęstości defektów. Następnie niezmiennik  $\text{tr}(\boldsymbol{\beta} - p\mathbf{I})$  określamy jako parametr niewspółosiowości eliptycznych defektów  $q$  [9]

$$q = \text{tr}(\boldsymbol{\beta} - p\mathbf{I}) = \frac{\pi}{A} \sum (a-b)^2 \quad (10)$$

Ostatecznie moduły efektywne obliczamy jako

$$\frac{e_{\{1,2\}}^{(\text{eff})}}{e_m} = (1 + p + 2\{\beta_{11}, \beta_{22}\})^{-1} \quad (11)$$

a efektywne współczynniki Poissona są równe

$$\{v_{12}^{(\text{eff})}, v_{21}^{(\text{eff})}\} = \frac{v_m + p}{1 + p + 2\{\beta_{11}, \beta_{22}\}} \quad (12)$$

Dla defektów o losowym rozkładzie tensor  $\boldsymbol{\beta}$  jest proporcjonalny do tensora jednostkowego  $\mathbf{I}$  i ze względu na  $\text{tr}\boldsymbol{\beta} = 2p + q$  otrzymujemy

$$\beta_{11} = p + \frac{q}{2} \quad (13)$$

a więc

$$\Delta f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2E_0} \left[ (4p + q) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - p (\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))^2 \right] \quad (14)$$

Ostatecznie obliczamy moduły efektywne jako:

$$e_i^{(\text{eff})} = \frac{e_m}{1 + 3p + q} \quad (15)$$

$$v_i^{(\text{eff})} = \frac{v_m + p}{1 + (2p + q)/(1 - \nu_0)}$$

## EFEKTYWNY TENSOR SPRĘŻYSTOŚCI

Wyznaczenie własności sprężystych kompozytu jest równoważne numerycznemu rozwiązaniu problemu komórkowego, gdzie przemieszczeniowa funkcja homogenizacji jest znajdowana z układu równań

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \sigma_{ij}(\chi_{(pq)}) \mathbf{n}_j = [C_{pqij}]_{\Gamma(r-1,r)} \mathbf{n}_j; \mathbf{x} \in \partial\Omega_\sigma \\ \chi_{(pq)} = 0; \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \\ \sigma_{ij}(\chi_{(pq)}) = C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\chi_{(pq)}) \\ \varepsilon_{kl}(\chi_{(pq)}) = \frac{1}{2} (\chi_{(pq)k,l} + \chi_{(pq)l,k}) \end{cases} \quad (16)$$

dla  $i, j, k, l, p, q = 1, 2$  w płaskim stanie odkształcenia. Rozwiązanie numeryczne MES problemów komórkowych dla  $p, q = 1, 1; 1, 2$  i  $2, 2$  pozwala obliczyć składowe efektywnego tensora sprężystości jako

$$C_{ijpq}^{(\text{eff})} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (C_{ijpq} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\chi_{(pq)})) d\Omega \quad (17)$$

Podstawą analizy wrażliwości jest wyznaczenie gradientów wrażliwości wybranych funkcji względem parametrów projektowych, które są zmiennymi wejściowymi problemu. Odpowiednie pochodne są wyznaczone przez różniczkowanie z definicji wykonywane w programach matematycznych do obliczeń symbolicznych lub przez zastosowanie odpowiednich metod numerycznych. W przypadku pierwszego składnika efektywnego tensora sprężystości możemy wyznaczyć jego gradienty wrażliwości w odniesieniu do modułu Younga składnika  $\beta$  jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_\beta} \langle C_{ijkl} \rangle_\Omega &= \frac{\partial}{\partial e_\beta} \int_\Omega C_{ijkl} d\Omega \\ &= \frac{c_\beta v_\beta}{(1+v_\beta)(1-2v_\beta)} \delta_{ij} \delta_{kl} \\ &\quad + \frac{c_\beta}{2(1+v_\beta)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (18)$$

## EFEKTYWNE WŁASNOŚCI TERMICZNE

Efektywny współczynnik przewodnictwa cieplnego dla periodycznych struktur kompozytowych można wyznaczać podobnie jak dla efektywnego tensora sprężystości poprzez numeryczne rozwiązanie odpowiedniego problemu brzegowego na komórce periodyczności [10]. W niniejszej pracy posługujemy się jednak oszacowaniami algebraicznymi [2, 7] w celu przedstawienia zalet symbolicznej analizy numerycznej do badania wrażliwości kompozytu.

Efektywny współczynnik przewodnictwa ciepła w kompozycie trójskładnikowym, w którym okrągłe włókno jest oddzielone od matrycy dodatkowym materiałem, wyznacza się zgodnie ze wzorem [7]

$$k^{(eff)} = k_3 + \frac{3(1-f_3)k_3}{f_3 - \frac{3k_3}{k_3 - k_2 - \frac{3f_1 k_2}{k_2 - k_1}}} \quad (19)$$

przy oznaczeniach

$$f_1 = p_1(1-f_3), \quad f_2 = p_2(1-f_3), \quad p_1 = \frac{r_c^3}{r_e^3} = 1 - p_2 \quad (20)$$

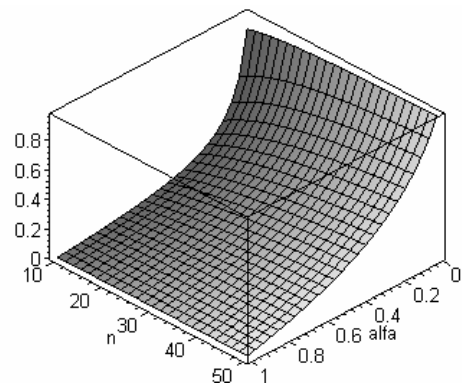
gdzie  $r_c$  oraz  $r_e$  oznaczają promień włókna oraz dodatkowego materiału (np. interfazy);  $k_i$ ,  $f_i$  określają przewodnictwo cieplne oraz udział objętościowy i-tego składnika.

Zależność powyższą otrzymuje się ze wzoru na efektywny współczynnik przewodnictwa ciepła dla kompozytu dwuskładnikowego [2, 7], w którym najpierw dokonuje się wyznaczenia parametru efektywnego dla

włókna i interfazy, a potem tak otrzymany materiał efektywny homogenizuje się ponownie z matrycą. Alternatywny sposób modelowania efektywnego przewodnictwa ciepła, w którym uwzględnia się zjawiska zachodzące na interfejsie, przedstawiono w pracy [6].

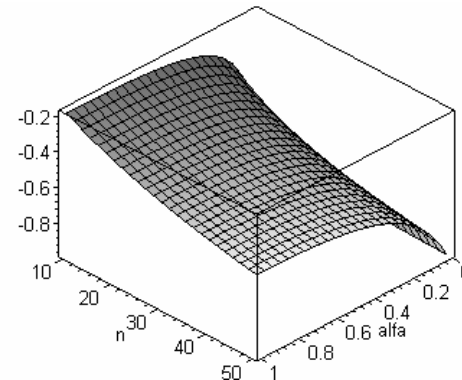
## WRAŻLIWOŚĆ INTERFEJSU NA DEFEKTY

Wrażliwość własności efektywnych interfazy określone odpowiednimi równaniami testowano dla następujących parametrów wejściowych modelu:  $e = 4 \cdot 10^9$  Pa,  $\nu = 0,34$ ,  $a = 0,016$ ,  $b = \alpha \cdot a$ , gdzie wielkość  $\alpha$  jest współczynnikiem spłaszczenia defektów; ponadto  $R = 0,40$ , natomiast grubość interfazy przyjęto jako równą  $1,3 \cdot b$ .



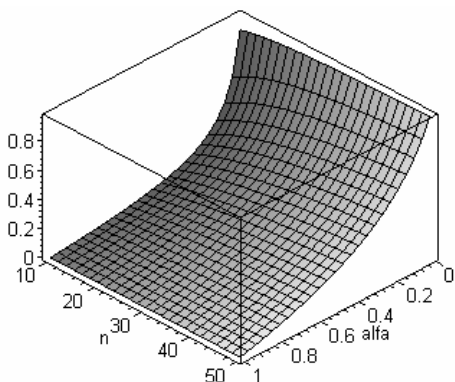
Rys. 2. Wrażliwość efektywnego modułu Younga interfazy na współczynnik spłaszczenia defektów

Fig. 2. Sensitivity of the interphase effective Young modulus to the defects flatness coefficient



Rys. 3. Wrażliwość efektywnego modułu Younga interfazy na liczbę defektów na interfejsie

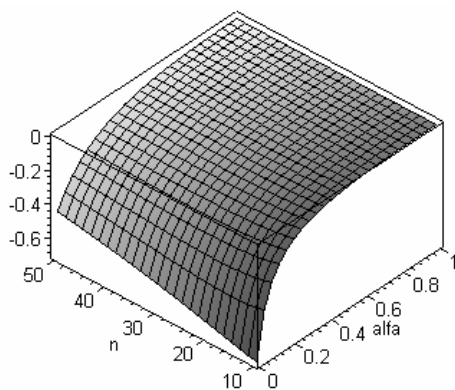
Fig. 3. Sensitivity of the interphase effective Young modulus to the number of the defects



Rys. 4. Wrażliwość efektywnego współczynnika Poissona interfazy na spłaszczenie defektów

Fig. 4. Sensitivity of the interphase Poisson ratio to the defects flatness coefficient

Jak wynika ze zgromadzonych rezultatów na rysunkach 2-5, wzrost współczynnika spłaszczenia (dominujący parametr) powoduje spadek wrażliwości modułu Younga interfazy na ten parametr. Analogiczna obserwacja dotyczy gradientu wrażliwości współczynnika Poissona na ten sam parametr; dla ustalonych przedziałów zmienności gradienty te są nieujemne. W przypadku natomiast wrażliwości zarówno modułu Younga, jak i współczynnika Poissona na liczbę defektów na interfejsie otrzymujemy wartości ujemne. Dominujący wpływ ma tutaj nadal współczynnik spłaszczenia defektów, a największe wartości bezwzględne gradientów są otrzymywane przy  $\alpha \rightarrow 0$ , jak dla podłużnych szczelin na interfejsie.



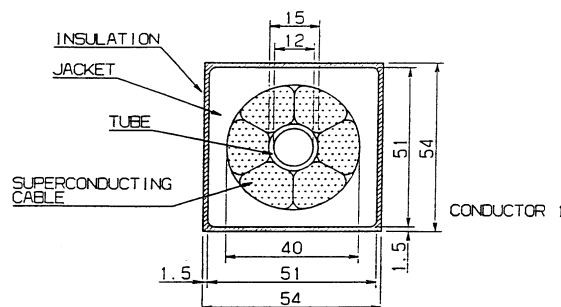
Rys. 5. Wrażliwość efektywnego współczynnika Poissona na liczbę defektów na interfejsie

Fig. 5. Sensitivity of the interphase effective Poisson ratio to the defects number on the interface

### ANALIZA WRAŻLIWOŚCI NADPRZEWODNIKA

Analizę wrażliwości efektywnych własności sprężystych kompozytu wieloskładnikowego bez defektów międzyskładnikowych przeprowadzono dla struktury nadprzewodzącej pokazanej na rysunku 6. Niezbędne obliczenia zostały wykonane za pomocą programu MCCEFF, opartego na metodzie elementów skończonych

oraz wykorzystującym element skończony płaskiego stanu odkształcenia. Ilustracja ta stanowi przykład zastosowania analizy wrażliwości własności mechanicznych struktur kompozytowych do kompozytu 4-składnikowego stosowanego w praktyce inżynierskiej.



Rys. 6. Komórka periodyczności nadprzewodnika

Fig. 6. Periodicity cell for the superconductor

TABELA 1. Własności materiałowe dla nadprzewodnika  
TABLE 1. Material properties for the superconductor

Materiał	E, GPa	$\nu$
Tuba ( $e_1, \nu_1$ )	205,0	0,265
Nadprzewodnik ( $e_2, \nu_2$ )	130,0	0,340
Ośłona ( $e_3, \nu_3$ )	126,0	0,311
Obudowa ( $e_4, \nu_4$ )	36,0	0,210

Jak wynika z rezultatów zgromadzonych w tabeli 2, gradienty wrażliwości wszystkich składowych tensora efektywnego względem własności materiałowych nadprzewodnika i osłony są o rząd większe niż dla pozostałych składników tego kompozytu. Większość gradientów jest dodatnia, co oznacza, że zwiększenie wartości tego parametru prowadzi do wzrostu odpowiedniej składowej efektywnego tensora sprężystości kompozytu. Wyjątek stanowią tu gradienty składowej  $C_{1212}^{(eff)}$  względem współczynników Poissona składników kompozytu.

TABELA 2. Gradienty wrażliwości dla nadprzewodnika  
TABLE 2. Sensitivity gradients for the superconductor

$h$	$\frac{\partial(C_{1111}^{(eff)})}{\partial h}$	$\frac{\partial(C_{1122}^{(eff)})}{\partial h}$	$\frac{\partial(C_{1212}^{(eff)})}{\partial h}$
$e_1$	0,036247	0,047183	0,039568
$e_2$	0,410930	0,431984	0,402256
$e_3$	0,501942	0,472358	0,521116
$e_4$	0,047032	0,044922	0,036964
$\nu_1$	0,011981	0,014691	-0,008195
$\nu_2$	0,581146	1,352374	-0,100675
$\nu_3$	0,525527	1,288470	-0,122040
$\nu_4$	0,015604	0,041674	-0,006340

## ANALIZA WRAŻLIWOŚCI WŁASNOŚCI TERMICZNYCH

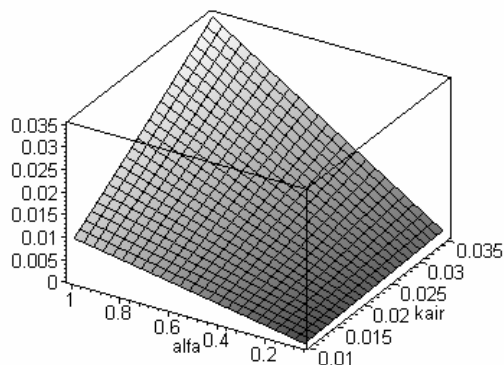
Kolejna ilustracja numeryczna dotyczy analizy wrażliwości efektywnego przewodnictwa cieplnego i efektywnej pojemności cieplnej całego kompozytu. Przeprowadzone studia numeryczne za pomocą programu MAPLE dotyczą wyznaczania wrażliwości tych parametrów w odniesieniu do własności termicznych samych defektów oraz spłaszczenia defektów pomiędzy składnikami. Dane materiałowe niezbędne do przeprowadzenia obliczeń zestawiono w tabeli 3;  $n = 10$ ,  $a = 0,016$ ,  $r_c = 0,4156$ ,  $r_c = 0,5$ ,  $b = a \cdot \alpha$ .

Jak wynika z danych przedstawionych na rysunkach 7 i 8, wrażliwość efektywnego współczynnika 'k' oraz 'c' odpowiednio na współczynnik przewodnictwa i pojemności cieplnej defektów ma podobny charakter, ale gradienty pojemności cieplnej są o rząd mniejsze. Wszystkie gradienty mają wartości dodatnie, ale współczynnik wrażliwości parametru  $c^{(eff)}$  jest dla minimalnej wartości parametru 'c' całkowicie niewrażliwy na współczynnik spłaszczenia defektów.

TABELA 3. Własności kompozytu szkło/epoksyd  
TABLE 3. Physical properties for the glass/epoxid composite

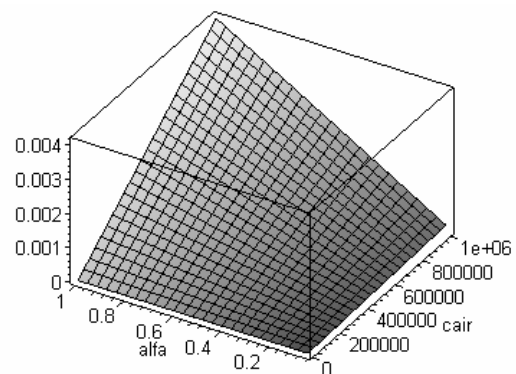
Material	Przewodnictwo cieplne 20°C W/mK	Pojemność cieplna 20°C J/m <sup>3</sup>
Powietrze	0,025	0,001
Włókna szklane (Pyrex 7740)	1,005	1,681
Epoksyd	0,3	0,100

Rysunki 9 i 10 pokazują, że wrażliwości efektywnego przewodnictwa i pojemności cieplnej na spłaszczenie defektów mają całkowicie odmienny charakter - dla  $k^{(eff)}$  dominują wartości ujemne, a dla  $c^{(eff)}$  - dodatnie. Wynika to głównie z faktu, iż efektywna pojemność cieplna jest wyznaczana jako uśrednienie współczynnika 'c' po obszarze komórki, a wielkość współczynnika  $k^{(eff)}$  wynika z rozwiązania odpowiedniego zagadnienia przewodnictwa ciepła.



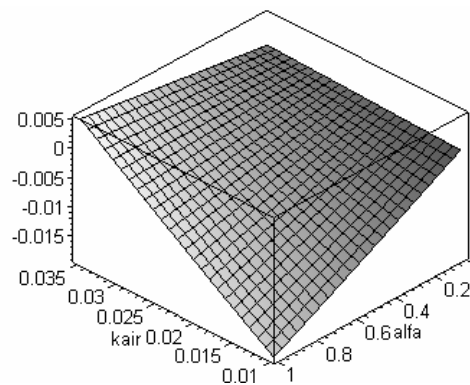
Rys. 7. Wrażliwość efektywnego współczynnika przewodnictwa na współczynnik 'k' dla defektów

Fig. 7. Sensitivity of the effective heat conductivity to the coefficient 'k' of the defects



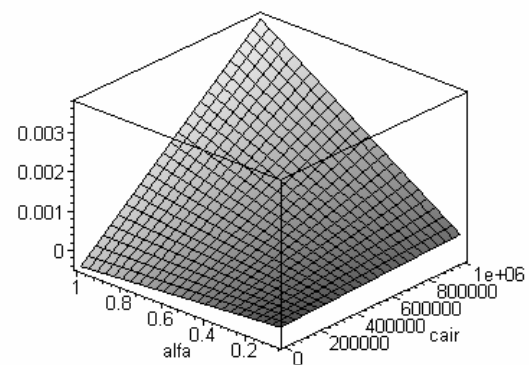
Rys. 8. Wrażliwość efektywnej pojemności cieplnej na współczynnik pojemności 'c' dla defektów

Fig. 8. Sensitivity of effective heat capacity to the coefficient 'c' of the defects



Rys. 9. Wrażliwość efektywnego współczynnika przewodnictwa ciepła na spłaszczenie defektów

Fig. 9. Sensitivity of the effective heat conductivity to the defects flatness coefficient



Rys. 10. Wrażliwość efektywnej pojemności cieplnej na spłaszczenie defektów

Fig. 10. Sensitivity of the effective heat capacity to the defects flatness coefficient

## PODSUMOWANIE

Zaproponowana w pracy metoda wyznaczania gradientów wrażliwości własności efektywnych periodycznych kompozytów wieloskładnikowych umożliwia nu-

meryczno-analityczne określenie tych gradientów również dla kompozytów z półeliptycznymi defektami na interfejsie. Jak wynika ze zgromadzonych rezultatów, współczynnik spłaszczenia tych defektów oraz własności fizyczne defektów mają bardzo duży wpływ na badane gradienty, podczas gdy ich liczba na interfejsie w analizowanym zakresie - znacznie mniejszy.

Przedstawione metody modelowania wrażliwości własności efektywnych interfejsy dla kompozytów z defektami na interfejsie, a także kompozytów wieloskładnikowych umożliwią w dalszej kolejności pełną analizę wpływu tych defektów na zhomogenizowane własności termomechaniczne kompozytów periodycznych. W dalszej kolejności możliwy będzie optymalny dobór parametrów materiałowych w komórce periodyczności dla dominującego charakteru obciążenia kompozytu (osiowe, dwuosiowe, styczne bądź też o charakterze złożonym) [5], jak też odpowiednią probabilistyczną analizę wrażliwości własności efektywnych kompozytu na momenty statystyczne parametrów materiałowych i geometrycznych kompozytu.

## LITERATURA

- [1] Bendsoe M., Kikuchi N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 1988, 71, 197-224.
- [2] Christensen R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Wiley 1979.
- [3] Fish J., Ghouali A., Multiscale analytical sensitivity analysis for composite materials, *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 2001, 50, 1501-1520.
- [4] Kamiński M., Multiscale homogenization of n-component composites with semi-elliptical stochastic interface defects, *Int. J. Sol. & Struct.* 2005, 42(11-12), 3751-3590.
- [5] Kamiński M., Sensitivity analysis of homogenized characteristics for some elastic composites, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2003, 192, 1973-2005.
- [6] Miloh T., Benveniste Y., On the effective conductivity of composites with ellipsoidal inhomogeneities and highly conducting interfaces, *Proc. R. Soc. London A* 1999, 455, 2687-2706.
- [7] Milton G.W., *The Theory of Composites*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [8] Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
- [9] Ostoja-Starzewski M., Jasiuk I., *Micromechanics of random media*, *Appl. Mech. Review* 1994, 47(1).
- [10] Rocha R.P.A., Cruz M.E., Computation of the effective conductivity of unidirectional fibrous composites with an interfacial thermal resistance, *Num. Heat Transfer Part A* 2001, 39, 179-203.
- [11] Tsukrov I., Kachanov M., Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution, *Int. J. Sol. Struct.* 2000, 37, 5919-5941.
- [12] Wang W., Jasiuk I., Effective elastic constants of particulate composites with inhomogeneous interphases, *J. Comp. Mat.* 1998, 15(32), 1391-1424.

Recenzent  
Ewaryst Wierzbicki