

Jan Lewiński*, Andrzej Wilczyński

Politechnika Warszawska, Instytut Mechaniki i Poligrafii, ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa, Poland

* Corresponding author. E-mail: jl@wip.pw.edu.pl

Otrzymano (Received) 05.12.2008

SKRĘCANIE NIESWOBODNE CIENKICH ZAMKNIĘTYCH PROFILI Z KOMPOZYTU

Przedstawiono rozwiązanie problemu nieswobodnego skręcania cienkich, zamkniętych profili kompozytowych. Zagadnienie to, opracowane dla materiałów izotropowych, nie znalazło dostępnych rozwiązań teoretycznych dla gwałtownie rozwijających się konstrukcji kompozytowych, powodując nie zawsze uzasadnione użycie metod numerycznych. W pracy wykorzystano monografie dotyczące materiałów izotropowych, używając podanych tam rozwiązań i metod, do których kieruje się czytelnika, po czym wprowadzono opisy materiałów kompozytowych (anizotropowych). Rozwiązanie polega na wyprowadzeniu zależności analitycznych pozwalających na wyznaczenie rozkładu naprężeń stycznych i normalnych w ściankach profilu, a także kątów skręcenia z uwzględnieniem nieswobodnego spaczenia profilu. Dla uzyskania pełnego opisu problemu rozwiązano kolejno problem skręcania swobodnego, problem ścinania siłami poprzecznymi i skręcanie nieswobodne. Efektem analizy skręcania swobodnego (ze swobodnym spaczeniem profilu) jest wprowadzenie pojęcia uogólnionej współrzędnej wycinkowej, które to pojęcie ma zasadnicze znaczenie w analizie właściwego skręcania nieswobodnego. Rozwiązanie problemu ścinania prowadzi do wyznaczenia środka sił poprzecznych, wokół którego odbywa się właściwe skręcanie. Analiza skręcania nieswobodnego dała końcowe zależności analityczne opisujące problem. Uzyskane zależności różnią się od analogicznych zależności dla izotropii wielkościami charakteryzującymi materiały kompozytowe. Pracę zakończono przykładem rozwiązania.

Słowa kluczowe: kompozyty polimerowe, skręcanie nieswobodne, współrzędne (wycinkowe) sektorowe, (wycinkowe) sektorowe momenty bezwładności

CONSTRAINED TORSION OF THIN, CLOSED COMPOSITE SECTIONS

The paper presents a theoretical solution for torsion of thin, closed composite sections. Such problems, known for isotropic materials are not easily accessible for anisotropic composite structures despite quick development of these materials. This enforces use of not always justifiable laborious numeric methods. Constrained torsion problems and solutions were posed and developed to a great extent in the Soviet Union, starting at the beginning of the thirties in the previous century and greatly, without the use of computers and applied mostly by the military aviation industry during the World War II. The presented solution is an exact extension of the known results, to which the reader is directed, to the case of anisotropic polymeric composites, using methods of description presented in several monographs, two of which can be found in the literature list. The solution is based on formulation of analytical relations, allowing for determination of normal and shear stress distributions in the wall of the tube and the angle of torsion, taking into account the warp of the profile. To obtain the full solution the problems of pure torsion, shear by transverse forces and finally the constrained torsion had to be investigated. Analysis of free torsion (with unrestricted warp possibility) led to introduction of a new quantity - the sectorial coordinate, a convenient area description in the cases of constrained torsion, replacing the possible use of higher order moments of inertia. Solution of the shear problem gave coordinates of the axis of rotation of the profile, while the case of constrained torsion allowed for calculation of normal stresses, not existing in pure torsion. Results for composite structures differ from isotropic cases only by the influence of anisotropic elasticity constants and use these values in weighted averages describing material properties. The proposed theory is used in an exemplary solution of an engineering problem, showing the straight applicability in simple cases.

Keywords: polymeric composites, constrained torsion, sectorial coordinates, sectorial moments of inertia

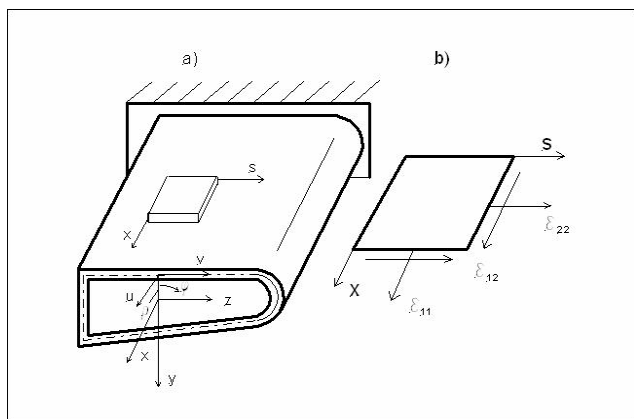
SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Analizowana jest pryzmatyczna rura kompozytowa, jednym końcem zamocowana, a na drugim swobodna, o dowolnym kształcie profilu, przedstawiona na rysunku 1. Na swobodnym końcu rury działa moment skręcający M . System (podobnie jak w [1]) opisany jest dwoma układami współrzędnych: globalnym x, y, z z osią x wzdłuż rury oraz lokalnym x, s , w którym s jest współ-

rzędną obwodową. Kształt profilu jest opisany dwiema funkcjami: promieniem wodzącym $\rho = \rho(s)$ oraz grubością ścianki $\delta = \delta(s)$. Dowolny punkt przekroju rury może doznawać przemieszczeń $u(x, s)$ oraz $v(s) = \rho(s) \varphi(x)$, stałych na grubości ścianki, gdzie $\varphi(x)$ jest kątem skręcenia przekroju. Kompozyt doznaje odkształceń

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial s}; \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Właściwości materiału na kierunkach x, s są znane i opisane równaniami konstytutywnymi (2), przy czym niekoniecznie pokrywają się one z właściwościami na kierunkach głównych x', s' .

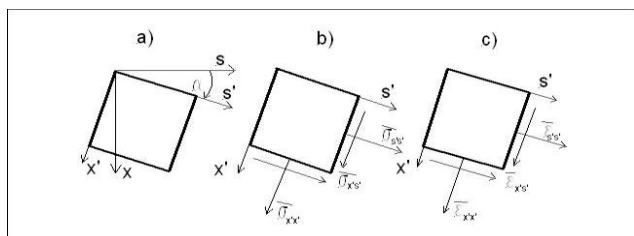


Rys. 1. Schemat stosowanych układów współrzędnych
Fig. 1. Scheme of the used coordinate systems

Równania konstytutywne laminatu, zapisane w kierunkach globalnych układu, przyjmują postać

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Kompozyt ma budowę warstwową, przy czym warstwę traktuje się jako ortotropową o znanych głównych kierunkach ortotropii. Na rysunku 2 osie x' i s' stanowią główne osie ortotropii warstwy. W celu sprowadzenia właściwości warstw do postaci przydatnej w zależnościach (2) należy je przeliczyć, używając odpowiednich, znanych związków dotyczących zmian własności przy obrocie układu.



Rys. 2. Lokalny i globalny układ współrzędnych
Fig. 2. Local and principal coordinate system

Kąt α określa położenie tych osi w stosunku do osi układu lokalnego x, s . Wartości głównych stałych sprężystości warstw są znane, zaś wartość globalnych stałych sprężystości laminatu można określić [2, 3], używając

zależności dotyczących obrotu układu współrzędnych oraz związków teorii wzmocnienia kompozytów

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\delta} \sum_w \sigma_{11}^w \delta_w; \sigma_{22} = \frac{1}{\delta} \sum_w \sigma_{22}^w \delta_w; \sigma_{12} = \frac{1}{\delta} \sum_w \sigma_{12}^w \delta_w$$

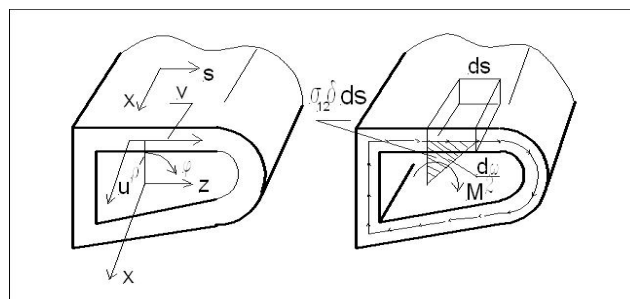
$$C_{ij} = \frac{1}{\delta} \sum_w C_{ij}^w \delta_w = C_{ji}; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3)$$

Używając (2) nie jest istotne, czy dotyczą one materiału jednorodnego czy laminatu. Analiza skrećania nieswobodnego tak opisanej rury kompozytowej wymaga uprzedniego rozwiązania problemu skrećania swobodnego (bez ograniczenia odkształceń wzdłużnych) oraz problemu ścinania, ściślej wyznaczenia środka sił poprzecznych.

SKREĆANIE SWOBODNE

Na rysunku 3 przedstawiono rurę poddaną obciążeniu swobodnego skrećania momentem M na jej wolnym końcu. Podobnie jak rury izotropowe zagadnienie zostanie rozwiązane, stosując podstawowe założenia Umanckiego [4]: $u \neq 0, v = \rho \varphi, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, które dla kompozytów pozostaną ściśle jedynie, jeżeli $C_{16} = C_{26} = 0$. Dalsze analizy będą ograniczone zasadniczo do tego przypadku. Przy tych założeniach

$$\sigma_{12} = C_{66} \varepsilon_{12} \quad (4)$$



Rys. 3. Swobodne skrećanie przy obciążeniu na końcu rury
Fig. 3. Free torsion under torque at the free end

Naprężenia styczne winny spełniać warunek równowagi

$$M = \oint \sigma_{12} \delta ds \rho = q \oint d\omega = 2Aq \quad (5)$$

gdzie $q = \sigma_{12} \delta = \text{const}$, zwane jest wydatkiem naprężeń stycznych, $d\omega = \rho ds$ - różniczką współrzędnej wycinkowej, A - polem konturu rury, a całkę krzywoliniową należy rozumieć jako całkowanie po całej długości współrzędnej s , równej D . Odkształcenie postaciowe wyrazi się wzorem

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{C_{66}} = \frac{q}{\delta C_{66}} \quad (6)$$

Przekształcając ostatni ze wzorów (1), uzyskuje się wyrażenie, określające przyrost przemieszczenia u , skąd po użyciu (6) i dokonaniu całkowania znajduje się przemieszczenie

$$u(x, s) = 2q \int_0^s \frac{ds}{\delta C_{66}} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \int_0^s \rho ds = 2q P_s - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \omega(s) \quad (7)$$

$$P_s = \int_0^s \frac{ds}{\delta C_{66}}; \quad \omega(s) = \int_0^s \rho ds$$

Przemieszczenie $u(x, s)$ określa spaczenie przekroju, czyli przemieszczenie wzdłużne punktu konturu o współrzędnej wycinkowej $\omega(s)$. Spaczenie punktów początkowego i końcowego na konturze zamkniętym muszą się równać, zatem

$$\oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = 2q P - 2A \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad P = \oint \frac{ds}{\delta C_{66}}$$

skąd można obliczyć jednostkowy kąt skręcenia oraz wielkość spaczenia przekroju

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q_0}{A} P = \frac{M P}{2A^2}$$

$$u(x, s) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[2A \frac{P_s}{P} - \omega(s) \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varpi(s) \quad (8)$$

$$\varpi(s) = 2A \frac{P_s}{P} - \omega(s)$$

Wyrażenie (8) pozwala na wyznaczenie kąta skręcenia, spaczenia, a także wprowadza nowe pojęcie uogólnionej współrzędnej wycinkowej $\varpi(s)$, koniecznej do wykorzystania w analizie skręcania nieswobodnego.

ŚCINANIE. ŚRODEK SIŁ POPRZECZNYCH

Na rysunku 4a przedstawiono profil rozważanej rury obciążony siłami tnącymi T_y i T_z , skierowanymi równoległe do osi centralnego układu współrzędnych x, y, z . Współrzędne środka ciężkości profilu

$$y_c = \frac{S_z}{F}; \quad z_c = \frac{S_y}{F}; \quad F = \oint C_{11} \delta ds \quad (9)$$

$$S_y = \oint C_{11} z \delta ds; \quad S_z = \oint C_{11} y \delta ds$$

względem układu odniesienia wyznacza się z zależności zawierających wagi równe stałym sztywności warstwy kompozytu. Zagadnienie ścinania rozwiązuje się przy założeniach: $\varphi(x) = 0$, $\sigma_{12} \neq 0$, $q \neq 0$. Wydatek naprężeń stycznych q wyznacza się, przecinając myślowo profil i wprowadzając nieznaną wydatek q_0 na tym przecięciu (rys. 4b), pomijając zagadnienie równowagi elementu powłoki, niedające różnic w równowadze całości. Biorąc pod uwagę zginanie w dwóch płaszczyznach otrzymano

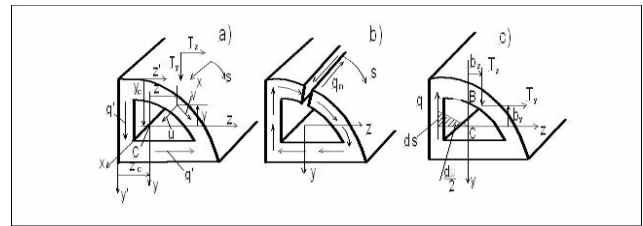
$$q = q_0 - \frac{C_{11}}{\Delta} \left[(T_y I_{zz} - T_z I_{yz}) S_y^s + (T_z I_{yy} - T_y I_{yz}) S_z^s \right]$$

$$I_{yy} = \oint C_{11} z^2 \delta ds; \quad I_{zz} = \oint C_{11} y^2 \delta ds; \quad I_{yz} = \oint C_{11} y \delta ds \quad (10)$$

$$S_y^s = \int_0^s C_{11} z \delta ds; \quad S_z^s = \int_0^s C_{11} y \delta ds; \quad \Delta = I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2$$

gdzie momenty statyczne i bezwładności zawierają wagi równe stałym sprężystości materiału. Naprężenia ścinania bez zjawiska skręcania można, używając (1) i (4), wyrazić wzorem

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial s} C_{66} \quad (11)$$



Rys. 4. Schematy przy ścinaniu kompozytu

Fig. 4. Shear schemes in a composite

Całkowanie zależności (11) z wykorzystaniem (6) prowadzi do określenia funkcji spaczenia u . Warunek równości spaczeń na początku i na końcu badanego łuku s prowadzi do wyrażenia

$$u(x, s) = 2q \int_0^s \frac{ds}{\delta C_{66}}; \quad q \cdot \oint \frac{ds}{\delta C_{66}} = 0 \quad (12)$$

z którego wynika wartość nieznanego wydatku q_0 , a mianowicie

$$q_0 = \frac{1}{\Delta P} \left[(T_y I_{zz} - T_z I_{yz}) \oint \frac{S_z^s ds}{\delta C_{66}} + (T_z I_{yy} - T_y I_{yz}) \oint \frac{S_y^s ds}{\delta C_{66}} \right] \quad (13)$$

Wypadkowa całkowitego wydatku q ma składowe rzeczywiste T_y i T_z , których moment musi równoważyć moment wywołany wydatkiem tych naprężeń stycznych względem dowolnie obranego punktu, jak C pokazany na rysunku 4c, co prowadzi do

$$\oint q d\omega \equiv T_y b_z + T_z b_y \quad (14)$$

Wykorzystując (10) i (13), można określić wartości współrzędnych środka sił poprzecznych

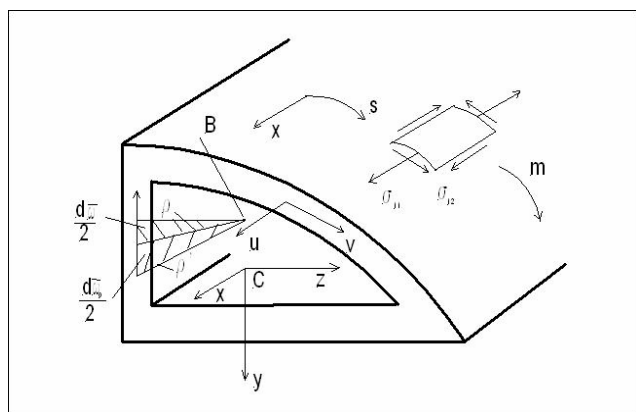
$$\begin{aligned}
 b_z &= \frac{1}{\Delta S} \oint \left[I_{yy} \left(\oint \frac{S_z^s ds}{\delta C_{66}} - S_z^s \right) - I_{yz} \left(\oint \frac{S_y^s ds}{\delta C_{66}} - S_y^s \right) \right] d\omega \\
 b_y &= \frac{1}{\Delta S} \oint \left[I_{zz} \left(\oint \frac{S_y^s ds}{\delta C_{66}} - S_y^s \right) - I_{yz} \left(\oint \frac{S_z^s ds}{\delta C_{66}} - S_z^s \right) \right] d\omega
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Powyższe zależności, określające położenie środka skrećania (i ścinania), różnią się od analogicznych zależności dla profili izotropowych jedynie występowaniem wag równych stałym sztywności kompozytu. Wielkości te zostaną wykorzystane w analizie skrećania nieswobodnego.

SKREĆANIE NIESWOBODNE

Jeżeli zamocowanie skrećanej rury ogranicza swobodę przemieszczeń wzdłużnych u , występuje skrećanie nieswobodne, znamienne pojawieniem się obok naprężeń stycznych σ_{12} naprężeń wzdłużnych σ_{11} . Używając oznaczeń z rysunku 5, przyjmuje się do analizy dwa podstawowe założenia Umanskiego [4] dla tego przypadku, a mianowicie: $\varepsilon_{22} = 0$; $u = f \varpi(s)$, gdzie $f(x)$ oznacza funkcję sterującą spaczeniem, które przyjmuje się proporcjonalne do uogólnionej współrzędnej wycinkowej $\varpi(s)$, danej związkem (8). Do wyznaczenia funkcji sterującej używa się odkształceń elementu rury

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \varpi(s) \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[f \frac{\partial \varpi(s)}{\partial s} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]
 \end{aligned}
 \tag{16}$$



Rys. 5. Schemat do analizy skrećania nieswobodnego

Fig. 5. Scheme for constrained torsion analysis

Pojawiające się naprężenia normalne σ_{11} muszą ponadto spełniać warunki równowagi

$$\oint \sigma_{11} \delta ds = 0; \quad \oint \sigma_{11} \delta ds y = 0; \quad \oint \sigma_{11} \delta ds z = 0 \tag{17}$$

Żeby ostatnie dwa warunki były spełnione, wystarczy, aby biegun współrzędnej wycinkowej $\omega(s)$ obrano w środku sił poprzecznych, zaś spełnienie pierwszego warunku prowadzi do określenia początku rachuby współrzędnej s , czyli ustalenia zerowego położenia promienia ρ . Poniższy związek

$$\varpi = \varpi_0 + \varpi(s) = \varpi_0 + 2A \frac{P_s}{P} - \omega(s) \tag{18}$$

przedstawia wycinkową współrzędną uogólnioną ϖ , liczoną od dowolnie przyjętego początku współrzędnej obwodowej s , zaś ϖ_0 - stałą wartość uogólnionej współrzędnej wycinkowej, określającą położenie zerowego promienia ρ . Zgodnie z (2) naprężenia przy skrećaniu nieswobodnym wyraża się

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{11} \varepsilon_{11} + C_{16} \varepsilon_{12} = \\
 &= C_{11} \varpi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} C_{16} \left[\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - f \right) + 2A \frac{f}{P} \frac{\partial P_s}{\partial s} \right] \\
 \sigma_{12} &= C_{61} \varepsilon_{11} + C_{66} \varepsilon_{12} = \\
 &= C_{61} \varpi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} C_{66} \left[\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - f \right) + 2A \frac{f}{P} \frac{\partial P_s}{\partial s} \right]
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Przy tych oznaczeniach pierwszy warunek zależności (18) pozwala obliczyć

$$\begin{aligned}
 \varpi_0 &= \\
 &= \frac{2 \frac{\partial f}{\partial x} \oint C_{11} \varpi(s) \delta ds + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - f \right) \oint C_{16} \rho \delta ds - 2 \frac{A}{P} f \oint C_{16} \frac{\partial P_s}{\partial s} \delta ds}{2 \frac{\partial f}{\partial x} F}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Naprężenia (19) zależą od nieznannej funkcji sterującej f , którą wyznacza się z warunku minimum energii układu. Do tego celu buduje się funkcjonal Π , utworzony z energii odkształcenia układu, pomniejszonej o pracę momentu ciągłego $m(x)$ na kącie skrećania $\varphi(x)$, co można zapisać jako

$$\begin{aligned}
 \Pi = U - L &= \frac{1}{2} \int_l (\Phi - 2m\varphi) dx = \int_l \Psi dx \\
 \Phi &= \oint (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12}) \delta ds
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ i pracochłonnych przekształceniach otrzymuje się

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2} I_{\omega} (f')^2 + \\ & + \frac{1}{4} [f^2 (J_r - 2J_d + J_b) - 2\varphi' f (J_r - J_d) + (\varphi')^2 J_r] + \\ & - \frac{3}{4} [\varphi' f' J_l - f f' (J_l - J_k)] \end{aligned} \quad (22)$$

Użyto tu oznaczeń

$$\begin{aligned} I_{\omega} = & \int C_{11} \varpi \delta ds; J_r = \int C_{66} \rho^2 \delta ds \\ J_b = & \frac{4A^2}{P^2} \int C_{66} \left(\frac{\partial P_s}{\partial s} \right)^2 \delta ds \\ J_d = & \frac{2A}{P} \int C_{66} \frac{\partial P_s}{\partial s} \rho \delta ds; J_l = \int C_{16} \rho \varpi \delta ds \\ J_k = & \frac{2A}{P} \int C_{16} \frac{\partial P_s}{\partial s} \varpi \delta ds \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie: I_{ω} - główny wycinkowy moment bezwładności przekroju, J_r - pseudobiegunowy moment bezwładności przekroju, J_b, J_d - główne części sztywności swobodnego skręcania, J_l, J_k - momenty bezwładności sprzężenia. Badanie minimum funkcjonału prowadzi do równań Eulera, których wykorzystanie daje dwa sprzężone równania różniczkowe zwyczajne do rozwiązania

$$\begin{aligned} I_{\omega} f'' - \frac{1}{2} f (J_r - 2J_d + J_b) + \frac{1}{2} \varphi' (J_r - J_d) - \frac{3}{4} \varphi'' J_l = 0 \\ J_r \varphi'' - f' (J_r - J_d) - \frac{3}{2} f'' J_l = 2m \end{aligned} \quad (24)$$

Znajduje się dwa rozwiązania, niezawierające już momentów sprzężenia, z powiązanymi stałymi całkowania, w postaci

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & H_1 + H_2 kx + H_3 \sinh kx + H_4 \cosh kx \\ f_0 = & F_1 + F_2 kx + F_3 \sinh kx + F_4 \cosh kx \\ k^2 = & \frac{(J_r - 2J_d + J_b) J_r - (J_r - J_d)^2}{2I_{\omega} J_r} = \frac{J_b}{2I_{\omega}} \left(1 - \frac{(J_d)^2}{J_b J_r} \right) \\ F_1 = & H_2 k \frac{J_r - J_d}{J_r - 2J_d + J_b}; F_2 = 0; F_3 = H_4 k \frac{J_r}{J_r - J_d} \\ F_4 = & H_3 k \frac{J_r}{J_r - J_d} \end{aligned} \quad (25)$$

Stałe te należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Rozwiązania szczególne zależą od postaci obciążenia, a dla spotykanego w praktyce przypadku $\delta = \text{const}$; $C_{11} = \text{const}$; $C_{66} = \text{const}$

$$\begin{aligned} P = \frac{D}{\delta C_{66}}; P_s = \frac{s}{\delta C_{66}}; \frac{\partial P_s}{\partial s} = \frac{1}{\delta C_{66}} \\ I_{\omega} = C_{11} \delta \int \omega^2 ds; J_r = C_{66} \delta \int \rho^2 ds \\ J_b = J_d = \frac{4A^2 \delta}{D} \end{aligned} \quad (26)$$

PRZYKŁAD ROZWIĄZANIA

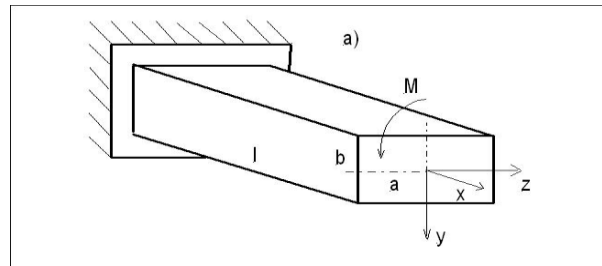
Analizowana będzie rura o przekroju prostokątnym, pokazana na rysunku 6, o wymiarach: $a = 400$ mm, $b = 200$ mm, $l = 2000$ mm. Rura jest obciążona na brzegu swobodnym momentem o wartości $M = 20 \cdot 10^6$ Nmm. Ścianki rury wykonane są z laminatu, którego właściwości globalne na podstawie (3) wynoszą $C_{11} = 118,52$ kN/mm²; $C_{66} = 53,5$ kN/mm²; $C_{16} = 0$. Dalej otrzymano

$$\begin{aligned} I_{\omega} = C_{11} \frac{\delta b^5}{18} = C_{11} \cdot 1,778 \cdot 10^{11} \\ J_b = C_{66} \frac{8}{3} b^3 \delta = C_{66} \cdot 21333 \cdot 10^6 \end{aligned} \quad (27)$$

$$J_r = C_{66} 3b^3 \delta = C_{66} \cdot 240 \cdot 10^6; kl = 10,97$$

Środek sił poprzecznych leży w początku układu współrzędnych, a początek promienia zerowego umieszczono na osi symetrii. Warunki brzegowe sprowadzają się do

$$\begin{aligned} \varphi_{(x=0)} = 0; f_{(x=0)} = 0; f'_{(x=l)} = 0 \\ [J_r \varphi' - f (J_r - J_d)]_{(x=l)} = M \end{aligned} \quad (28)$$



Rys. 6. Skręcana rura kompozytowa

Fig. 6. Composite tube in torsion

Ostatni z tych warunków wynika z całkowania drugiej z zależności (24). Prowadzi to do rozwiązania

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{M l}{J_d} \left[\frac{x}{l} - \left(1 - \frac{J_d}{J_r} \right) \frac{\sinh kl - \sinh k(l-x)}{kl \cdot \cosh kl} \right] \\ f(x) = \frac{M}{J_d} \left[1 - \frac{\cosh k(l-x)}{\cosh kl} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Maksymalny kąt skręcenia, obliczany dla $x = l$, wynosi

$$\varphi_{\max} = \frac{M l}{J_d} \left(1 - \left(1 - \frac{J_d}{J_r} \right) \operatorname{tgh} kl \right) \quad (30)$$

$$\varphi_{\max} = 0,99 \frac{M l}{J_d} = 3,47 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$$

Naprężenia normalne przy użyciu (19) wyrażą się:

$$\sigma_{11} = C_{11} \frac{\partial f}{\partial x} \varpi(s) = C_{11} \frac{M \sinh k(l-x)}{J_d \cosh kl} \varpi(s) \quad (31)$$

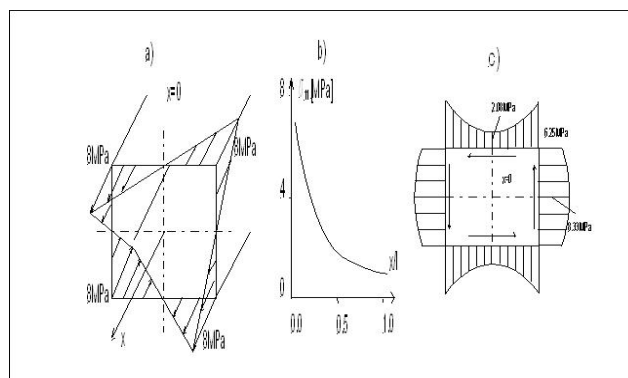
Ich największe wartości występują w przekroju $x = 0$, a szczegółowe wartości dla przyjętych danych rozkładu w przekroju pokazano na rysunku 7a, gdzie osiągają wartość maksymalną $\sigma_{11 \max} = 8 \text{ MPa}$, a ich zmienność wzdłuż długości pręta przedstawiono na rysunku 7b. Naprężenia styczne, wynikające ze wzorów (19), spełniają globalny warunek równowagi. Uwzględnienie warunków równowagi elementu płaszcza pręta [1] prowadzi ostatecznie do wzoru

$$\sigma_{12} = \frac{M}{2A\delta} - \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta}; [\sigma_{12}]_{x=l} \approx \frac{M}{2A\delta} = 6,25 \text{ MPa}$$

$$M_\omega = M \left(1 - \frac{J_d}{J_r} \right) \frac{\cosh k(l-x)}{\cosh kl} \quad (32)$$

$$S_\omega = S_\omega - \frac{1}{2A\delta} \oint S_\omega^s d\omega; S_\omega^s = \int_0^s C_{11} \varpi(s) \delta ds$$

$$S_\omega = \oint C_{11} \varpi(s) \delta ds$$



Rys. 7. Rozkłady naprężeń normalnych

Fig. 7. Distribution of normal stresses

Pierwsza część pierwszego ze związków (32) dotyczy naprężeń wywołanych skęrcaniem swobodnym, a druga wywołanych przez wprowadzone tu pojęcie sprzężonego momentu giętno-skrętnego M_ω . Rozkład i wartości tych naprężeń w przekroju $x = 0$ pokazano na rysunku 7c.

LITERATURA

- [1] Brzoska Z., Mechanika prętów cienkościennych, [w:] Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych, Rozdz. IV, Komitet Mechaniki PAN, PWN, Warszawa 1988.
- [2] Wilczyński A.P., Polimerowe kompozyty włókniste, WNT, Warszawa 1996.
- [3] Dato H.M., Mechanics of fibrous composites, Elsevier 1991.
- [4] Umanskij A.A., Kručenje i izgib tonkostennykh aviakonstrukcij, Oborongiz, Moskva 1939.